Revista Internacional de Métodos Numéricos para Cálculo y Diseño en Ingeniería. Vol. 10, **3**, 209–236(1994)

ESTUDIOS DE ALGUNOS PROBLEMAS BÁSICOS DE LOCALIZACIÓN DE DEFORMACIONES MEDIANTE ELEMENTOS FINITOS

FRANCISCO MARTÍNEZ CUTILLAS
y
JOSÉ MARÍA GOICOLEA

E.T.S. Ingenieros de Caminos,
Ciudad Universitaria, 28040 Madrid,
Tel: (91) 336 67 61, Fax: (91) 336 67 02

RESUMEN

En este trabajo se presenta un estudio comparativo de diversos elementos formulados mediante de *métodos variacionales mixtos de deformaciones supuestas* y su aptitud para reproducir bandas de localización bajo estados tensionales simples.
Se describen en primer lugar las condiciones necesarias para que la localización de deformaciones pueda tener lugar desde un punto de vista analítico así como las distintas aproximaciones numéricas.
Se plantea la formulación de algunos elementos propuestos anteriormente por otros autores como Wilson/Taylor, Simó/Rifai, Andelfinger/Ramm y Ortiz/Leroy realizando análisis comparativos de los resultados en ejemplos básicos de localización de deformaciones. Se comprueba que los elementos tradicionalmente aceptados para análisis no lineales, como los cuadriláteros $\overline{\mathbf{B}}$, son incapaces de reproducir bandas de localización. Sin embargo los elementos formulados bajo principios variacionales mixtos han presentado resultados correctos y muy similares entre sí.

SUMMARY

In this paper a comparison among different elements is presented within the context of *mixed assumed strain methods* with regard to their capacity to represent strain localization bands under simple state of stress.
Firstly the mathematical requirements to develop a strain localization band are described as well as the different numerical approximation techniques.
The formulation for some elements proposed recently by other authors such as Wilson/Taylor, Simó/Rifai, Andelfinger/Ramm and Ortiz/Leroy is described and different comparative results of basic localization examples are then presented. It is verified that the $\overline{\mathbf{B}}$ quadrilaterals, widely used in non-linear analysis, are not capable to exhibit localization bands. However the elements formulated within mixed assumed strain methods present correct and very similar results.

Recibido: Diciembre 1993

©Universitat Politècnica de Catalunya (España) ISSN 0213–1315

INTRODUCCIÓN

Se entiende por localización de deformaciones la formación de bandas estrechas que generan una discontinuidad en el campo de deformaciones. La importancia de este fenómeno radica en que es el precursor de la rotura de diversos materiales, así como el generador de mecanismos de grandes desplazamientos que desencadenan una degradación en la respuesta de los sólidos.

El fenómeno de localización de deformaciones se presenta en gran variedad de materiales ingenieriles: metales estructurales[55], arenas[47,48], rocas[51,44], hormigones[46], etc.

Asimismo los mecanismos físicos que dan origen a dicha localización pueden ser muy variados. En metales sometidos a altas velocidades de deformación, el ablandamiento térmico en condiciones adiabáticas juega un papel fundamental[3]. En metales a bajas velocidades de deformación, las distintas orientaciones en el deslizamiento de cristales son suficientes para desencadenar la inestabilidad que origina la localización de deformaciones, como en el caso de la estricción de una probeta sometida a tracción simple. En esta situación se produce en una zona determinada una disminución del área neta resistente, lo que incrementa la tensión y consecuentemente la deformación de manera inestable[45].

En suelos, los deslizamientos que tienen lugar a nivel intergranular se comportan como pequeñas bandas de deformación que evolucionan hasta formar una zona de discontinuidad bien definida[10] La dilatancia juega un papel desestabilizador al favorecer la disminución de la tensión efectiva de confinamiento y por tanto la disminución de la capacidad desviadora, favoreciendo la localización de deformaciones.

En materiales frágiles como rocas y hormigones el carácter heterogéneo de su composición condiciona la iniciación de la localización, siendo la fractura el mecanismo que determina el origen y evolución de las bandas de discontinuidad. La localización se inicia por el crecimiento de microdefectos existentes alrededor de las inclusiones de árido o mineral. Dichas microfisuras coalescen y evolucionan dando lugar a planos de discontinuidad[46].

Desde un punto de vista analítico, el problema de localización de deformaciones puede plantearse como consecuencia de la generación y desarrollo de una discontinuidad del campo de deformaciones. El tratamiento matemático de los fenómenos de discontinuidad en un medio continuo se puede abordar mediante la teoría de Hadamard[15] para la propagación de frentes de onda de discontinuidades. Como consecuencia de esta teoría la localización se asocia con la anulación de la velocidad de propagación de ondas y por tanto, con la aparición de ondas estacionarias[20,35]. Aunque el problema no resulta abordable analíticamente desde un punto de vista general, diversos autores han analizado las condiciones críticas de localización para estados de deformación bidimensionales y estados de carga simples. Resultan destacables las aportaciones de Hill y Hutchinson[16] en sólidos con criterio de fluencia de Von Mises, deformación plana y flujo asociativo. Rudnicki y Rice[36] desarrollaron las condiciones críticas en materiales cohesivo-friccionales con flujo no asociativo y superficie de fluencia tipo Drucker-Prager, y Vardoulakis, Goldsheider y Gudehus[47] para un criterio de fluencia Mohr-Coulomb. Recientemente, Runesson y Ottosen[37] han realizado un estudio más general que engloba los resultados anteriormente citados, analizando las

condiciones necesarias para que la localización tenga lugar para una superficie de fluencia genérica, tanto en tensión como deformación plana.

En la práctica, sin embargo, los modelos analíticos citados tienen un rango de aplicación limitado a casos sumamente idealizados y de escasa relevancia ingenieril. Debe recurrirse a la discretización del problema de contorno y su consiguiente resolución numérica en el ordenador, siendo la metodología de Elementos Finitos la más comúnmente aceptada.

Este tratamiento numérico para problemas de localización de deformaciones lleva aparejado algunas dificultades notables:

1. Se trata de simular un fenómeno de discontinuidad de deformaciones mediante una teoría basada en la mecánica de medios continuos[27]. Existe una incapacidad aparente de los elementos finitos usuales para captar el fenómeno de localización dentro de su dominio debido a que éstos aproximan de forma continua el campo de deformaciones.
2. El fenómeno de localización lleva asociado, en materiales no dependientes de la velocidad de deformación, un mal planteamiento matemático del problema de contorno[26], originando una falta de unicidad en la solución. Por otro lado, los modelos de la elastoplasticidad clásica no contemplan ninguna longitud característica que permita definir un ancho de la banda de localización que regularice el problema de contorno. Por tanto si no se adoptan precauciones especiales, los resultados no serán únicos, dependiendo de la discretización adoptada[8,19].

A las dificultades anteriores deben añadirse las intrínsecas a un problema elastoplástico y fuertemente no lineal, como son la propia integración de las ecuaciones constitutivas, y la tendencia al bloqueo o sobrerrigidización de la malla en flujo plástico cuasi-incompresible[25].

En este trabajo se presenta un estudio comparativo de diversas formulaciones de elementos finitos "mejorados", dentro del contexto de los métodos de deformaciones supuestas, en cuanto a su aptitud para reproducir bandas de localización bajo estados tensionales simples. En primer lugar se resume la descripción matemática de la localización, así como los posibles tratamientos numéricos del problema. Seguidamente se expone de forma concisa la formulación de los elementos mejorados empleados en este trabajo. A continuación se describen varios ejemplos básicos de localización y los resultados obtenidos mediante el análisis por elementos finitos. Del examen de los resultados obtenidos, se concluye que los elementos descritos muestran una capacidad notable para analizar problemas de localización, poseyendo por otra parte una formulación suficientemente general de forma que sus aplicaciones no se reducen a este tipo de problemas.

A. CRITERIO DE LOCALIZACIÓN: PLANTEAMIENTO ESTÁTICO

Se efectúa aquí un resumen de la descripción de la localización así como los requerimientos matemáticos para la misma, en el marco de la teoría de Hadamard[15] Para una exposición más detallada, se recomienda consultar las publicaciones de

Mandel[20] y Rice[35].

Se admite la existencia de un sólido homogéneo sometido a un incremento cuasiestático de deformación $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}$. El objetivo es averiguar bajo qué condiciones se produce un plano de orientación $\boldsymbol{n}$ a través del cual exista una discontinuidad de deformaciones.

El campo de velocidades, $\dot{\boldsymbol{u}}$, debe permanecer continuo, incluso una vez iniciada la localización de deformaciones, a pesar de que $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = \nabla^s \dot{\boldsymbol{u}}$ sea discontinuo a través de la superficie de localización. Dicho salto de la función gradiente de velocidades se expresa matemáticamente del siguiente modo:

$$[\![\nabla \dot{\boldsymbol{u}}]\!] = \nabla \dot{\boldsymbol{u}}^+ - \nabla \dot{\boldsymbol{u}}^- \neq \mathbf{0}, \tag{1}$$

donde los superíndices (+) y (−) denotan los valores del campo a cada lado de la discontinuidad (Figura 1).

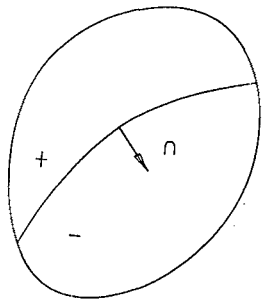


Figura 1. Superficie de discontinuidad del campo de deformaciones

Con el fin de garantizar la continuidad del campo de velocidades, las condiciones de compatibilidad de Hadamard[15] indican que el salto de la función $\nabla \dot{\boldsymbol{u}}$ no es independiente, debiendo existir una función $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})$ tal que:

$$[\![\nabla \dot{\boldsymbol{u}}]\!] = \boldsymbol{g} \otimes \boldsymbol{n} \tag{2}$$

siendo $\otimes$ el producto tensorial o diádico ($(\boldsymbol{g} \otimes \boldsymbol{n})_{ij} = g_i n_j$). El salto del tensor velocidad de deformación es por tanto:

$$[\![\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}]\!] = \frac{1}{2}(\boldsymbol{g} \otimes \boldsymbol{n} + \boldsymbol{n} \otimes \boldsymbol{g}). \tag{3}$$

Se considera una relación constitutiva incremental de la forma:

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \boldsymbol{D} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \tag{4}$$

donde $\boldsymbol{D}$ es el tensor de 4° orden de módulos constitutivos tangentes. Dado que el problema se plantea en condiciones estáticas, no tiene sentido establecer una dependencia del material con la velocidad de deformación, por tanto el tensor $\boldsymbol{D}$ es una función homogénea de grado cero en $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}$.

Se admite, por hipótesis, que al inicio de la localización, el material se encuentra en la misma rama de carga a ambos lados de la discontinuidad, por lo que el salto de la tasa de tensiones deberá verificar:

$$[\![\dot{\boldsymbol{\sigma}}]\!] = \boldsymbol{D} : [\![\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}]\!]. \tag{5}$$

De este modo, si se impone la condición de equilibrio a través de los planos de discontinuidad, se debe establecer la continuidad del vector tensión $\boldsymbol{t}$, resultando:

$$[\![\dot{\boldsymbol{t}}]\!] = \boldsymbol{n} \cdot [\![\dot{\boldsymbol{\sigma}}]\!] = \boldsymbol{0}; \tag{6}$$

empleando (5), (3) y la simetría de $\boldsymbol{D}$ se llega a

$$\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{D} : (\boldsymbol{g} \otimes \boldsymbol{n}) = \boldsymbol{0}. \tag{7}$$

Se denomina *tensor acústico* del material a

$$\boldsymbol{Q}(\boldsymbol{n}) \overset{\text{def}}{=} \boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{D} \cdot \boldsymbol{n},$$

dependiendo de los módulos tangentes $\boldsymbol{D}$ del material en cada punto, y de la orientación $\boldsymbol{n}$. La ecuación (7) se resume por tanto como

$$\mathbf{Q}(\boldsymbol{n}) \cdot \boldsymbol{g} = \boldsymbol{0}. \tag{8}$$

Para que esta ecuación homogénea tenga solución distinta de la trivial, se ha de verificar que el tensor acústico tenga al menos un autovalor nulo:

$$\det[\boldsymbol{Q}(\boldsymbol{n})] = 0. \tag{9}$$

Se observa que el criterio matemático que establece las condiciones suficientes para la localización de deformaciones se sustenta en las características constitutivas del comportamiento del material. Asimismo, conviene destacar que la existencia de autovalores nulos en el tensor acústico implica una pérdida del carácter elíptico de las ecuaciones de equilibrio del sólido. Análogamente, en problemas dinámicos, se produce una pérdida del carácter hiperbólico de la ecuación dinámica de Cauchy, dando lugar a velocidades imaginarias de propagación de ondas.

Es importante puntualizar, como destaca Needleman[26], que esta pérdida del carácter elíptico de las ecuaciones, conduce a que el problema de contorno asociado se encuentre matemáticamente mal planteado. Asimismo de las propias ecuaciones no se puede inferir el ancho de la banda de localización, pudiendo ser arbitrariamente pequeña. Esta falta de definición trae consigo una falta de objetividad de los análisis numéricos con respecto al tamaño de malla empleado. Esto es, existe una dependencia de los resultados numéricos con la discretización: distintos resultados para distintas mallas, siendo la solución claramente insatisfactoria.

B. APROXIMACIÓN NUMÉRICA

Las aproximaciones numéricas realizadas mediante el método de los Elementos Finitos al fenómeno de localización intentan solventar dos cuestiones:

1. La mejora de la capacidad de los distintos elementos para capturar saltos en los gradientes de deformación; esta condición equivale a permitir la captura de la cinemática de las bandas de bifurcación.
2. La regularización del problema de contorno, mediante la adaptación de modelos constitutivos que permitan incorporar longitudes de escala en el propio modelo; esta condición busca evitar la dependencia de los resultados de la malla empleada.

B1. Técnicas de discretización y diseño de elementos especiales

Las formulaciones convencionales utilizadas en el método de los elementos finitos no permiten una adecuada representación de los elevados gradientes de deformación asociados a la cinemática de la localización de deformaciones. Para evitar este inconveniente, se han empleado dos tipos de técnicas: bien mediante el desarrollo de elementos específicamente orientados a la localización, bien mediante el empleo de técnicas de discretización autoadaptativas que permiten un mayor refinamiento en las zonas de mayor gradiente.

Pietruszczak y Mroz[32] fueron los primeros en desarrollar elementos específicos para el tratamiento de problemas de localización. Consideran en su formulación de la matriz de rigidez elemental la existencia de una banda de deformaciones superpuesta al campo de deformaciones existente. Tanto la orientación de la banda como su espesor se consideran dados. Por tanto los resultados son insensibles a la discretización.

Tvergaard et al[45], capturan los gradientes de deformación mediante elementos cuadrangulares divididos en triángulos, orientando los lados de los triángulos de forma sensiblemente paralela a la dirección estimada de la banda.

Ortiz et al[28] han diseñado un elemento para capturar los saltos de deformación (ver el Apartado C3.4 de este trabajo). La dirección de la banda de localización se establece a priori mediante un criterio de localización a nivel puntual. Una vez conocida esta dirección se añaden unas funciones constantes a trozos que dividen al elemento en dos, de forma que se produzca un salto en el campo de deformaciones. La definición de este campo adicional, incompatible con el campo de desplazamientos, introduce unos grados de libertad internos que son eliminados mediante condensación estática a nivel de cada elemento. Una extensión de este procedimiento a deformaciones finitas se debe a Nacar et al[24]. En éstas dos últimas formulaciones, el propio tamaño del elemento actúa como longitud característica que gobierna el ancho de la banda de localización.

Belytschko y Fish[7,13], emplean una técnica similar mediante el desarrollo de una metodología de enriquecimiento del campo de deformaciones en la dirección normal a la banda de localización. Para tal fin, hacen uso de la formulación de elementos de deformaciones supuestas ASM (Assumed Strain Methods). A diferencia del elemento desarrollado por Ortiz et al[28], estos elementos se caracterizan por tener embebida la banda con un ancho prefijado de antemano, de forma similar al elemento de Pietruszczak y Mroz; la orientación de la banda viene determinada por las características constitutivas.

En esta misma línea se pueden enmarcar los trabajos de Dvorkin et al, aplicados al hormigón[11,12].

La reciente reformulación del elemento de Wilson-Taylor[54]por parte de Simó y Rifai[40] dentro de un contexto variacional de deformaciones supuestas (ver Apartado C3.1 de este trabajo), ha permitido generalizar la formulación a problemas de plasticidad y grandes deformaciones[41]. En estudios realizados por Steinmann y Willam con estos elementos[42,43] para problemas de localización han proporcionado excelentes resultados, comportándose de manera muy similar a los elementos específicamente diseñados para localización de deformaciones. En los apartados sucesivos se describirá con mayor detalle la formulación de estos elementos, efectuándose asimismo un análisis comparativo de su capacidad para capturar bandas de localización de deformaciones.

Existen aproximaciones recientes, relacionadas con la mejora de la técnica de discretización, consistentes en refinar la malla de elementos en zonas donde se detectan mayores gradientes de deformación. Conviene destacar la formulación de remallaje adaptativo como la propuesta por Ortiz y Quigley[29,30]. El criterio de refinamiento empleado es tal, que la variación de la solución es la misma en todos los elementos de la malla.

Conviene subrayar que las técnicas numéricas anteriormente descritas están orientadas únicamente a representar discontinuidades de deformación , es decir a capturar la cinemática. Como se ha dicho, esto no garantiza la consistencia de la solución, a no ser que se tomen precauciones adicionales, de modo que puede depender de la propia discretización.

B2. Introducción de limitadores de localización

En condiciones estáticas, como ya se ha comentado, el fenómeno de localización se caracteriza por una pérdida del carácter elíptico de las ecuaciones incrementales de equilibrio; esto conduce a una bifurcación desde una respuesta homogénea, a una respuesta no homogénea del campo de deformaciones. Las formulaciones elastoplásticas convencionales no permiten la introducción de parámetros de longitud que definan una anchura de la banda de localización, de este modo, la solución en deformaciones resulta en una banda de espesor nulo. La respuesta es, por tanto, altamente dependiente de la discretización empleada.

Una manera de eludir esta dificultad es mediante el planteamiento de formulaciones que modifiquen el carácter de las ecuaciones. De este modo, mediante la introducción de unos parámetros o limitadores de localización, se puede evitar que la región de localización degenere en un conjunto de medida nula[6].

Entre los limitadores de localización propuestos destaca el *limitador diferencial* propuesto por Vardoulakis y Aifantis[49]. La introducción de gradientes de los desplazamientos de segundo orden, dentro de formulaciones elastoplásticas, juega un papel estabilizador para la obtención de soluciones bien planteadas en régimen de ablandamiento. De esta forma se puede introducir un parámetro de longitud que permite controlar el ancho de la banda de localización.

El *limitador integral* constituye uno de los limitadores más conocidos, tambien denominado formulación de continuo no-local, introducido por Bazant y Pijaudier-Cabot[4]. En esta formulación, la variable deformación plástica se considera no local,

esto es, su valor se obtiene como ponderación en un dominio finito caracterizado por una longitud característica. Dicha longitud es una propiedad de cada material y tiene el mismo orden de magnitud que el mayor tamaño de una inhomogeneidad característica[4].

Otras de las aproximaciones corresponde al *limitador viscoplástico* introducido por Needleman[26] para problemas dinámicos y desarrollado más recientemente por Loret y Prevost[19,33]. Esta estrategia ha venido motivada por el hecho de que en materiales dependientes de la velocidad de deformación, no se produce una pérdida del carácter hiperbólico de las ecuaciones dinámicas de equilibrio. En este sentido, la dependencia de la velocidad de deformación introduce de una manera natural una longitud de escala $c\eta$ (donde c es la velocidad de propagación de las ondas elásticas y η el parámetro de viscosidad) que actúa como limitador. El parámetro de viscosidad puede ser visto, por tanto, como un parámetro regularizador (punto de vista numérico) o como un parámetro micromecánico, que se determina a partir de los anchos de banda de localización observados experimentalmente[19].

Dado que los materiales no dependientes de la velocidad de deformación se pueden considerar como un caso límite, es posible hacer un tratamiento de la localización de estos materiales desde el punto de vista de la viscoplasticidad.

Otro planteamiento para regularizar la respuesta post-bifurcación es mediante el empleo de formulaciones que, dentro de la mecánica de medios continuos, puedan incluir longitudes de escala microestructurales. En esta línea se puede incluir la formulación del continuo de Cosserat, que ha sido utilizada por primera vez para abordar problemas de localización de deformaciones por Muhlhaus y Vardoulakis[23]. La formulación del continuo micropolar de Cosserat, que posee más de ochenta años de antiguedad[9], se caracteriza por incluir además de los tres grados de libertad traslacionales, tres grados de libertad rotacionales. De este modo, el tensor de deformaciones posee unas nuevas componentes, que tienen el carácter de micro-curvaturas; el tensor de tensiones conjugado, incorpora unos micro-momentos, siendo ambos no simétricos.

C. ELEMENTOS MEJORADOS

C1. Preámbulo

En los últimos años se ha dedicado una especial atención al desarrollo de elementos de *"altas prestaciones"*. Dicho término engloba a elementos de bajo orden, que presentan una gran exactitud en mallas de elementos finitos no excesivamente refinadas. Dichos elementos se han propuesto como variantes de los elementos convencionales formulados en desplazamientos. Tradicionalmente las mejoras introducidas han consistido en ajustes ad-hoc sin más justificación, muchas veces, que la de los propios resultados.

Conviene destacar las modificaciones del elemento cuadrilátero de interpolación lineal introducidas por Wilson y Taylor para mejorar su comportamiento a flexión mediante la incorporación de modos de desplazamiento incompatibles[54]. Resulta igualmente destacable la formulación volumétrica media, propuesta por Nagtegaal et al[25], como método para evitar el bloqueo de elementos cuadriláteros en condiciones próximas a la incompresibilidad. De manera similar Flanagan y Belytschko[14],

empleando un operador proyección, desacoplan la matriz de rigidez en un término subintegrado y un término de estabilización. Hughes[18] unifica los conceptos de integración reducida y selectiva así como el planteamiento volumétrico medio mediante la formulación $\bar{\mathbf{B}}$ en la que la matriz de compatibilidad cinemática deformación-desplazamiento $\mathbf{B}$ es sustituida por otra modificada $\bar{\mathbf{B}}$.

De forma paralela ha habido un interés en justificar dichos ajustes, mediante formulaciones variacionales, con vistas a dotarlos de un planteamiento matemáticamente consistente y un enfoque más general, ampliando de este modo el campo de aplicación para el que inicialmente fueron concebidos. Destaca en este sentido la justificación variacional de la formulación $\bar{\mathbf{B}}$ propuesta por Simó y Hughes[39]. Belytschko y Bachrach[5] presentan una justificación a las técnicas de proyección de la matriz de rigidez mediante un planteamiento variacional basado en un funcional de Hu-Washizu. Pian y Sumihara[31] utilizan desplazamientos incompatibles para introducir un campo de tensiones supuesto mediante un principio variacional de Hellinger-Reissner.

Recientemente Simó y Rifai han propuesto una formulación de deformaciones supuestas mejoradas "Enhanced Assumed Strain" (EAS)[40] que enmarca de forma natural el planteamiento de modos incompatibles de Wilson y Taylor dentro de un principio variacional de Hu-Washizu. En esta formulación el campo de deformaciones *supuesto* se descompone en un campo de deformaciones *compatible* con el campo de desplazamientos y un campo *mejorado.*

El planteamiento de elementos mejorados en el contexto de deformaciones supuestas posee como ventaja fundamental su incorporación natural a problemas distintos de la elasticidad lineal, y en particular su extensión a problemas de plasticidad en la que la resolución iterativa del problema no lineal se plantea en incrementos de desplazamientos y por tanto de deformaciones. Ello motiva que los algoritmos tradicionales de resolución (algoritmos de retorno, etc.) sigan siendo válidos para estos elementos[40]. De igual forma existen generalizaciones de esta formulación por parte de Simó y Armero[41] para problemas geométricamente no lineales.

Andelfinger y Ramm[1,2] han planteado la equivalencia de las formulaciones EAS con las desarrolladas a partir del principio de Hellinger-Reissner. Weissman y Taylor[52,53] han realizado una propuesta unificada de los métodos mixtos de elementos finitos para la generación de elementos cuadriláteros de tensión y deformación plana con campos de tensiones y deformaciones supuestas.

Steinmann y Willam han verificado las prestaciones de estos elementos de deformaciones mejoradas dentro del ámbito de la localización de deformaciones[42,43], obteniendo resultados comparables a elementos específicamente desarrollados para tal fin. Estos resultados han servido de motivación para realizar un estudio comparativo en un ámbito más amplio como se describe en el Apartado D.

C2. Formulación

C2.1. Planteamiento del problema variacional

Se resume en este apartado la formulación de deformaciones supuestas empleada, en el marco desarrollado en[40]. Se parte para ello de la formulación variacional de 3 campos de Hu-Washizu, para a continuación introducir una reparametrización con base en las

deformaciones supuestas. Para un mayor detalle, consultar la referencia citada o[21].

Sea un cuerpo elástico $\mathcal{B}$ que ocupa un dominio $\Omega \subset R^3$. El cuerpo está limitado por una frontera $S = \partial\Omega$ que se descompone en dos partes, $S = S_d \cup S_t$. Sobre S_d se conocen los desplazamientos $\boldsymbol{d}$, mientras que sobre S_t son conocidas las tensiones $\boldsymbol{t}$. El vector normal exterior a S se denota por $\boldsymbol{n}$. Se considera por tanto:

$$\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{n} = \boldsymbol{t} \quad \text{en} \quad S_t, \tag{10}$$

$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{d} \quad \text{en} \quad S_d. \tag{11}$$

Para cada punto $\boldsymbol{x} \in \Omega$ se define un campo $\boldsymbol{b}$ de fuerzas por unidad de volumen. Asimismo se define una función $W(\boldsymbol{\varepsilon})$ que corresponde a la densidad de energía interna por unidad de volumen, dependiente del tensor de deformaciones lineal $\boldsymbol{\varepsilon}$. Las incógnitas del problema corresponden al campo de desplazamientos $\boldsymbol{u}$, al campo de deformaciones infinitesimales $\boldsymbol{\varepsilon}$ y al campo de tensiones $\boldsymbol{\sigma}$ en Ω. La formulación variacional de Hu-Washizu[50] considera los tres campos citados como independientes: $(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\sigma}) \in \mathcal{V} \times \mathcal{E} \times \mathcal{S}$, Donde $\mathcal{V}$, $\mathcal{E}$, $\mathcal{S}$ son los espacios funcionales de cuadrado integrable de las funciones solución en desplazamientos, deformación y tensión respectivamente.

El funcional de Hu-Washizu en función de los tres campos mencionados es:

$$\Pi(\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{u}) = U(\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{u}) - P(\boldsymbol{u}), \tag{12}$$

donde:

$$\left.\begin{aligned} U(\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{u}) &= \int_\Omega [W(\boldsymbol{\varepsilon}) + \boldsymbol{\sigma} : (\nabla^s \boldsymbol{u} - \boldsymbol{\varepsilon})]\, dV, \\ P(\boldsymbol{u}) &= \int_\Omega \rho_0 \boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{u}\, dV + \int_{S_t} \boldsymbol{t} \cdot \boldsymbol{u}\, dS. \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

Los campos solución ($\boldsymbol{u}$,$\boldsymbol{\varepsilon}$,$\boldsymbol{\sigma}$) serán aquellos para los que el funcional II tome un valor estacionario (mínimo). Igualando a cero la variación del funcional para valores arbitrarios $(\delta\boldsymbol{u}, \delta\boldsymbol{\sigma}, \delta\boldsymbol{\varepsilon})$, se obtienen tres ecuaciones que expresan las condiciones de equilibrio, compatibilidad y constitutivas respectivamente:

$$\left.\begin{aligned} \int_\Omega \nabla^s(\delta\boldsymbol{u}) : \boldsymbol{\sigma}\, dV - G_{ext}(\delta\boldsymbol{u}) &= 0 \\ \int_\Omega \delta\boldsymbol{\sigma} : [\nabla^s \boldsymbol{u} - \boldsymbol{\varepsilon}]\, dV &= 0 \\ \int_\Omega \delta\boldsymbol{\varepsilon} : [-\boldsymbol{\sigma} + \partial_{\boldsymbol{\varepsilon}} W(\boldsymbol{\varepsilon})]\, dV &= 0 \end{aligned}\right\} \tag{14}$$

donde

$$G_{ext}(\delta\boldsymbol{u}) = \int_\Omega \rho_0 \boldsymbol{b} \cdot \delta\boldsymbol{u}\, dV + \int_{S_t} \boldsymbol{t} \cdot \delta\boldsymbol{u}\, dS,$$

$$\partial_{\boldsymbol{\varepsilon}} W = \partial W / \partial \boldsymbol{\varepsilon}.$$

Se admite una reparametrización del campo de deformaciones de la forma:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \nabla^s \boldsymbol{u} + \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}; \qquad \delta\boldsymbol{\varepsilon} = \nabla^s(\delta\boldsymbol{u}) + \delta\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}. \tag{15}$$

Donde $\nabla^s \boldsymbol{u}$ (parte simétrica del gradiente de desplazamientos) es la componente *"compatible"* del campo de deformaciones, y $\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}$ es la componente *"mejorada"* del campo de deformaciones. Esta denominación responde a que, como se verá a continuación, para la solución aproximada discreta, el campo $\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}$ permite mejorar dicha aproximación. No es preciso imponer ningún requerimiento de continuidad a priori al campo $\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}$ entre los distintos elementos. Con esta reparametrización, las nuevas ecuaciones resultan:

$$\left.\begin{aligned} \int_\Omega \nabla^s(\delta \boldsymbol{u}) : \partial_{\boldsymbol{\varepsilon}} W(\nabla^s \boldsymbol{u} + \bar{\boldsymbol{\varepsilon}})\, dV - G_{ext}(\delta \boldsymbol{u}) = 0 \\ \int_\Omega \delta \boldsymbol{\sigma} : \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}\, dV = 0 \\ \int_\Omega \delta \bar{\boldsymbol{\varepsilon}} : [-\boldsymbol{\sigma} + \partial_{\boldsymbol{\varepsilon}} W(\nabla^s \boldsymbol{u} + \bar{\boldsymbol{\varepsilon}})]\, dV = 0 \end{aligned}\right\} \tag{16}$$

para todas las posibles variaciones $(\delta \boldsymbol{u}, \delta \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}, \delta \boldsymbol{\sigma}) \in \mathcal{V} \times \overline{\mathcal{E}} \times \mathcal{S}$, donde $\overline{\mathcal{E}}$ es el espacio de las variaciones admisibles de deformaciones mejoradas.

Las ecuaciones de Euler-Lagrange, o formulación fuerte del problema variacional correspondiente a las ecuaciones (16) resultan, $\forall \boldsymbol{x} \in \Omega$:

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{div}[\partial_{\boldsymbol{\varepsilon}} W(\nabla^s \boldsymbol{u} + \bar{\boldsymbol{\varepsilon}})] + \rho_0 \boldsymbol{b} = \mathbf{0} \\ \bar{\boldsymbol{\varepsilon}} = \mathbf{0} \\ \boldsymbol{\sigma} - \partial_{\boldsymbol{\varepsilon}} W(\nabla^s \boldsymbol{u} + \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}) = \mathbf{0}. \end{aligned}\right\} \tag{17}$$

Conviene hacer notar que las ecuaciones anteriores corresponden al problema convencional de elasticidad, con la salvedad de que la tensión es función no sólo de la deformación "compatible" $(\nabla^s \boldsymbol{u})$, sino también de la "mejorada" $(\bar{\boldsymbol{\varepsilon}})$. Dicho planteamiento puede parecer trivial ya que en la solución exacta las deformaciones mejoradas son idénticamente cero (ver ecuación $(17)_2$); sin embargo no resulta así en el problema discreto, como comprobaremos más adelante.

C2.2. Discretización de las ecuaciones variacionales

Aproximación del campo de deformaciones compatibles

Para el campo de deformaciones compatibles es posible establecer la aproximación habitual isoparamétrica de elementos finitos. Sea $\boldsymbol{u}_e^h \in \mathcal{V}^h \subset \mathcal{V}$ y $\nabla^s \boldsymbol{u}^h \in \nabla^s \mathcal{V}^h \subset \nabla \mathcal{V}$, siendo $\mathcal{V}^h$ y $\nabla^s \mathcal{V}^h$ espacios funcionales de dimensión finita, asociados a una discretización "h". La aproximación se realiza mediante las funciones de forma $\mathbf{N}(\boldsymbol{\xi})$, referidas a coordenadas isoparamétricas $\boldsymbol{\xi}$:

$$\boldsymbol{u}_e^h = \mathbf{N}_e(\boldsymbol{\xi}) \cdot \mathbf{d}_e, \tag{18}$$

$$\nabla^s \boldsymbol{u}_e^h = \mathbf{B}_e(\boldsymbol{\xi}) \cdot \mathbf{d}_e, \tag{19}$$

donde $\mathbf{B}_e(\boldsymbol{\xi}) = \nabla^s \mathbf{N}_e(\boldsymbol{\xi})$ es el operador de interpolación de deformaciones del elemento, y $\mathbf{d}_e$ son los desplazamientos nodales del elemento.

Aproximación del campo de deformaciones "mejorado"

Es posible establecer un criterio de aproximación para $\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}$ similar al definido en el campo de deformaciones compatible. Sea $\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_e^h(\boldsymbol{\xi}) \in \overline{\mathcal{E}}^h \subset \overline{\mathcal{E}}$:

$$\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_e^h(\boldsymbol{\xi}) = \mathbf{G}_e(\boldsymbol{\xi}) \cdot \boldsymbol{\alpha}_e, \tag{20}$$

donde $\mathbf{G}_e(\boldsymbol{\xi})$ es el operador de interpolación de deformaciones "mejoradas" del elemento, y $\boldsymbol{\alpha}_e$ son parámetros internos del elemento, generadores del campo de deformaciones "mejoradas".

En relación con $\mathcal{S}^h$, lo tomaremos ortogonal a $\overline{\mathcal{E}}^h$, con lo que la ecuación $(16)_2$ se cumplirá idénticamente:

$$\forall(\delta\boldsymbol{\sigma}_e^h, \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_e^h) \in \mathcal{S}^h \times \overline{\mathcal{E}}^h, \quad \int_{\Omega_e} \delta\boldsymbol{\sigma}_e^h : \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_e^h \, dV = 0. \tag{21}$$

Si se sustituyen las aproximaciones (18), (19) y (20) en las ecuaciones variacionales (16) se obtiene:

$$\left.\begin{aligned} \sum_{e=1}^{nel} \delta\mathbf{d}_e^{\mathrm{T}} \cdot [\mathbf{f}_e^{int}(\mathbf{d}_e, \boldsymbol{\alpha}_e) - \mathbf{f}_e^{ext}] = 0 \\ \sum_{e=1}^{nel} \delta\mathbf{d}_e^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{h}_e(\mathbf{d}_e, \boldsymbol{\alpha}_e) = 0 \end{aligned}\right\} \tag{22}$$

donde:

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_e^{ext} &\stackrel{\text{def}}{=} \int_{\Omega_e} \rho_0 \mathbf{N}_e^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{\xi}) \cdot \boldsymbol{b} \, dV + \int_{\partial\Omega_e} \mathbf{N}_e^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{\xi}) \cdot \boldsymbol{t} \, dS, \\ \mathbf{f}_e^{int}(\mathbf{d}_e, \boldsymbol{\alpha}_e) &\stackrel{\text{def}}{=} \int_{\Omega_e} \mathbf{B}_e^{\mathrm{T}} \cdot \partial_{\boldsymbol{\varepsilon}} W(\mathbf{B}_e \cdot \mathbf{d}_e + \mathbf{G}_e \cdot \boldsymbol{\alpha}_e) \, dV, \\ \mathbf{h}_e(\mathbf{d}_e, \boldsymbol{\alpha}_e) &\stackrel{\text{def}}{=} \int_{\Omega_e} \mathbf{G}_e^{\mathrm{T}} \cdot \partial_{\boldsymbol{\varepsilon}} W(\mathbf{B}_e \cdot \mathbf{d}_e + \mathbf{G}_e \cdot \boldsymbol{\alpha}_e) \, dV. \end{aligned}$$

C2.3. Metodología de resolución de las ecuaciones de elementos finitos

Partiendo de las ecuaciones variacionales discretizadas (22), si $\delta\mathbf{d}_e$ son arbitrarios:

$$\left.\begin{aligned} \mathsf{A}_{e=1}^{nel}[\mathbf{f}_e^{int}(\mathbf{d}_e, \boldsymbol{\alpha}_e) - \mathbf{f}_e^{ext}] = \mathbf{0}, \\ \mathbf{h}_e = \mathbf{0}, \end{aligned}\right\} \tag{23}$$

donde $\mathsf{A}_{e=1}^{nel}$ es el operador de ensamblaje de elementos de la malla.

Estas ecuaciones corresponden en general a un sistema no lineal de ecuaciones cuyas incógnitas son, además de $\mathbf{d}_e$ (las usuales en una formulación en desplazamientos), las variables adicionales $\boldsymbol{\alpha}_e$, debidas a la variación independiente de $\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}$. La resolución de este sistema se efectúa convencionalmente mediante el procedimiento de Newton-Raphson. Conviene resaltar que $\boldsymbol{\alpha}_e$ son variables internas a nivel de cada elemento, por lo que pueden ser calculadas sin necesidad de ensamblar el sistema de ecuaciones global; de

esta forma, para una iteración (k) del sistema global se ha de verificar para cada elemento:

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{f}_e^{int}(\mathbf{d}_e^{(k)} + \Delta\mathbf{d}_e^{(k)}, \boldsymbol{\alpha}_e^{(k)} + \Delta\boldsymbol{\alpha}_e^{(k)}) - \mathbf{f}_e^{ext} = \mathbf{0}, \\ \mathbf{h}_e(\mathbf{d}_e^{(k)} + \Delta\mathbf{d}_e^{(k)}, \boldsymbol{\alpha}_e^{(k)} + \Delta\boldsymbol{\alpha}_e^{(k)}) = \mathbf{0}. \end{aligned}\right\} \tag{24}$$

Linealizando estas ecuaciones, se obtiene la siguiente ecuación matricial:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{K}_e^{(k)} & [\boldsymbol{\Gamma}_e^{(k)}]^{\mathrm{T}} \\ \boldsymbol{\Gamma}_e^{(k)} & \mathbf{H}_e^{(k)} \end{pmatrix} \left\{ \begin{array}{c} \Delta\mathbf{d}_e \\ \Delta\boldsymbol{\alpha}_e \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} -\mathbf{f}_e^{int(k)} + \mathbf{f}_e^{ext(k)} \\ -\mathbf{h}_e^{(k)} \end{array} \right\}. \tag{25}$$

Donde se ha empleado la notación

$$\mathbf{K}_e^{(k)} \stackrel{\text{def}}{=} \left.\frac{\partial \mathbf{f}_e^{int}}{\partial \mathbf{d}_e}\right|_{(k)} = \int_{\Omega_e} (\mathbf{B}^{\mathrm{T}} \cdot \boldsymbol{D}^{(k)} \cdot \mathbf{B})\, dV, \tag{26}$$

$$\boldsymbol{\Gamma}_e^{(k)} \stackrel{\text{def}}{=} \left.\frac{\partial \mathbf{h}_e}{\partial \mathbf{d}_e}\right|_{(k)} = \left.\left[\frac{\partial \mathbf{f}_e^{int}}{\partial \boldsymbol{\alpha}_e}\right]^{\mathrm{T}}\right|_{(k)} = \int_{\Omega_e} (\mathbf{G}^{\mathrm{T}} \cdot \boldsymbol{D}^{(k)} \cdot \mathbf{B})\, dV, \tag{27}$$

$$\mathbf{H}_e^{(k)} \stackrel{\text{def}}{=} \left.\frac{\partial \mathbf{h}_e}{\partial \boldsymbol{\alpha}_e}\right|_{(k)} = \int_{\Omega_e} (\mathbf{G}^{\mathrm{T}} \cdot \boldsymbol{D}^{(k)} \cdot \mathbf{G})\, dV, \tag{28}$$

$$\boldsymbol{D}^{(k)} \stackrel{\text{def}}{=} \partial^2_{\boldsymbol{\varepsilon}\boldsymbol{\varepsilon}} W(\mathbf{B} \cdot \mathbf{d}_e^{(k)} + \mathbf{G} \cdot \boldsymbol{\alpha}_e^{(k)}). \tag{29}$$

Eliminando $\Delta\boldsymbol{\alpha}_e$ de (25):

$$\Delta\boldsymbol{\alpha}_e = -[\mathbf{H}_e^{(k)}]^{-1} \cdot [\boldsymbol{\Gamma}_e^k \cdot \Delta\mathbf{d}_e^{(k)} + \mathbf{h}_e^{(k)}], \tag{30}$$

se obtiene la ecuación matricial condensada:

$$\overline{\mathbf{K}}_e^{(k)} \cdot \Delta\mathbf{d}_e = \mathbf{f}_e^{ext(k)} - \overline{\mathbf{f}}_e^{int(k)}, \tag{31}$$

donde se han empleado las matrices de rigidez y fuerzas internas modificadas definidas por

$$\overline{\mathbf{K}}_e^{(k)} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{K}_e^{(k)} - [\boldsymbol{\Gamma}_e^{(k)}]^{\mathrm{T}} \cdot [\mathbf{H}_e^{(k)}]^{-1} \cdot [\boldsymbol{\Gamma}_e^{(k)}],$$
$$\overline{\mathbf{f}}_e^{int(k)} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{f}_e^{int(k)} - [\boldsymbol{\Gamma}_e^{(k)}]^{\mathrm{T}} \cdot [\mathbf{H}_e^{(k)}]^{-1} \cdot \mathbf{h}_e^{(k)}.$$

Conviene hacer notar que a pesar de que el planteamiento se ha enmarcado en el contexto de la elasticidad no lineal, se puede extender al campo de la plasticidad sin más que sustituir el operador constitutivo tangente de la elasticidad definido en (29) por el operador elastoplástico tangente $\boldsymbol{D}_{ep}^{(k)}$.

Si para este operador se emplea la matriz algorítmicamente consistente, se obtiene una convergencia de tipo cuadrático en el problema elastoplástico[38]. Los requerimientos generales de convergencia y estabilidad se analizan de forma detallada en las referencias 40 y 34. Conviene destacar aquí tan sólo dos aspectos:

- Para garantizar la estabilidad del procedimiento se debe verificar que la matriz $\mathbf{H}_e$ sea definida positiva y, por tanto, debe ser invertible. Para ello las columnas de la matriz $\mathbf{G}(\boldsymbol{\xi})$ deben ser linealmente independientes entre sí, dado que:

$$\mathbf{H}_e = \int_{\square} (\mathbf{G}^{\mathrm{T}} \cdot \boldsymbol{D} \cdot \mathbf{G})\, j(\boldsymbol{\xi})\, d\square, \tag{32}$$

donde $j(\boldsymbol{\xi}) = \det(\partial \mathbf{x}/\partial \boldsymbol{\xi})$, determinante del Jacobiano de la transformación isoparamétrica, y $\boldsymbol{D}$ es una matriz definida positiva. La integración anterior se realiza sobre el dominio isoparamétrico, en general un cuadrado o cubo, según sea el problema de 2 ó 3 dimensiones, de lado $[-1,+1]$ y que se denota por $\square$; por ejemplo, para 3 dimensiones con esta notación sería $d\square = d\xi\, d\eta\, d\zeta$.

- Una condición necesaria para la convergencia de estos elementos es que sean capaces de reproducir un campo de tensiones constante, dentro del espíritu del "criterio de la parcela". Por tanto, si se elige un campo de tensiones constante $\boldsymbol{\sigma}^0$, la condición de ortogonalidad que se desprende de (21) implicará:

$$\boldsymbol{\alpha}_e \cdot \int_{\square} (\mathbf{G}^{\mathrm{T}} \cdot \boldsymbol{\sigma}^0) j(\boldsymbol{\xi})\, d\square = 0, \quad \forall \boldsymbol{\alpha}_e \in R^{n_\varepsilon},\ \forall \boldsymbol{\sigma}^0. \tag{33}$$

Si se define: $\overline{\mathbf{G}} \overset{\text{def}}{=} \int_{\square} \mathbf{G}\, j(\boldsymbol{\xi})\, d\square$, la condición anterior equivale a:

$$\overline{\mathbf{G}}^{\mathrm{T}} \cdot \boldsymbol{\sigma}^0 = 0 \quad \forall \boldsymbol{\sigma}^0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \overline{\mathbf{G}} = \mathbf{0}. \tag{34}$$

Es decir, el cumplimiento del criterio de la parcela obliga a que la media sobre el elemento $\overline{\mathbf{G}}$ sea nula. Este requerimiento corresponde al planteamiento débil de la condición que implica la anulación del campo de deformaciones mejoradas en las ecuaciones de Euler-Lagrange (17).

C2.4. Generación de campos de deformaciones supuestas

Empleando las coordenadas isoparamétricas, es posible definir en este caso una metodología para definición de elementos similar a la propuesta por Pian y Sumihara[31] para campos de tensiones. De esta manera, el campo de deformaciones supuestas se formula en las coordenadas naturales del elemento, y a continuación se transforma al campo de coordenadas físico. La relación entre ambos campos es

$$\overline{\boldsymbol{E}}_e(\boldsymbol{\xi}) = \frac{j(\boldsymbol{\xi})}{j_0} \mathbf{J}_0^{-\mathrm{T}} \cdot \bar{\boldsymbol{\varepsilon}} \cdot \mathbf{J}_0, \tag{35}$$

donde

$$\mathbf{J}_0 \overset{\text{def}}{=} \left.\frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial \boldsymbol{\xi}}\right|_{\boldsymbol{\xi}=\mathbf{0}}; \quad j_0 \overset{\text{def}}{=} \det(\mathbf{J}_0).$$

Los pasos a seguir resultan por tanto:

1. Definir las funciones de interpolación $\mathbf{E}(\boldsymbol{\xi})$ para el campo de deformaciones mejorado $\overline{\boldsymbol{E}}_e(\boldsymbol{\xi})$ en el espacio de coordenadas naturales:

$$\overline{\boldsymbol{E}}_e(\boldsymbol{\xi}) = \mathbf{E}(\boldsymbol{\xi}) \cdot \boldsymbol{\alpha}_e, \quad \boldsymbol{\alpha}_e \in R^{n_\varepsilon}, \tag{36}$$

donde n_ε es el número de parámetros independientes que definen el campo.

2. Obtención de las funciones de interpolación $\mathbf{G}(\boldsymbol{\xi})$ para el campo de deformaciones mejorado $\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_e(\boldsymbol{\xi})$ en el espacio físico:

$$\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_e(\boldsymbol{\xi}) = \mathbf{G}(\boldsymbol{\xi}) \cdot \boldsymbol{\alpha}_e, \quad \boldsymbol{\alpha}_e \in R^{n_\varepsilon}, \tag{37}$$

donde

$$\mathbf{G}(\boldsymbol{\xi}) = \frac{j_0}{j(\boldsymbol{\xi})}[\mathbf{J}_0^{-T} \cdot \mathbf{E} \cdot \mathbf{J}_0^{-1}], \tag{38}$$

Así, si se impone la condición (34), sabiendo que $\mathbf{J}_0$ y j_0 son constantes, se obtiene:

$$\int_\square \mathbf{E}(\boldsymbol{\xi})\, d\square = 0. \tag{39}$$

De esta forma, se observa que la incorporación del término $j_0/j(\boldsymbol{\xi})$ en la ecuación (38) conduce a la restricción (39) que es independiente de la geometría del elemento, siendo tan sólo función de la estructura del operador $\mathbf{E}(\boldsymbol{\xi})$ de interpolación de deformaciones mejoradas en coordenadas isoparamétricas. Este operador proporciona por tanto un método idóneo para clasificar los elementos de deformaciones supuestas, como se ve a continuación.

C3. Ejemplos

Se plantean aquí, para el caso bidimensional, diversos elementos cuadriláteros de 4 nodos descritos según la formulación anterior.

C3.1. Cuadrilátero de Wilson/Taylor Q1/E4

Simó y Rifai[40] han demostrado que el elemento incompatible de Wilson y Taylor[54] se puede expresar en el espacio de la coordenadas naturales del siguiente modo:

$$\mathbf{E}_t = \begin{bmatrix} \xi & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \eta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \xi & \eta \end{bmatrix} \tag{40}$$

Es inmediato comprobar que en este caso $\int_\square \mathbf{E}_t\, d\square = 0$. Este elemento se denomina QM6 en el caso lineal, o según Simó[40] Q1/E4, correspondiente al cuadrilátero bilineal con cuatro modos adicionales de deformación.

C3.2. Cuadrilátero de Simó/Rifai Q1/E5

Si en el campo de interpolación de deformaciones de Wilson[54] desarrollado en el campo de coordenadas naturales, expresado en el Apartado C3.4, se restan las dos últimas columnas, se obtiene:

$$\mathbf{E}_{sr} = \begin{bmatrix} \xi & 0 & 0 & 0 & \xi\eta \\ 0 & \eta & 0 & 0 & -\xi\eta \\ 0 & 0 & \xi & \eta & \xi^2 - \eta^2 \end{bmatrix} \tag{41}$$

Asimismo se verifica $\int_\square \mathbf{E}_{sr}\, d\square = 0$. Se obtiene por tanto un nuevo elemento con cinco modos extra, denominado Q1/E5.

C3.3. Cuadrilátero de Andelfinger/Ramm Q1/E7

Elemento propuesto por Andelfinger[2], correspondiente a completar el elemento de Wilson/Taylor mediante términos cuadráticos:

$$\mathbf{E}_{ar} = \begin{bmatrix} \xi & 0 & 0 & 0 & \xi\eta & 0 & 0 \\ 0 & \eta & 0 & 0 & 0 & \xi\eta & 0 \\ 0 & 0 & \xi & \eta & 0 & 0 & \xi\eta \end{bmatrix} \tag{42}$$

Es fácil comprobar que en este elemento se verifica $\int_{\square} \mathbf{E}_{ar}\, d\square = 0$, así como que las columnas de la matriz de interpolación de deformaciones mejoradas son vectores linealmente independientes, verificándose los requerimientos necesarios para la convergencia y estabilidad.

C3.4 Cuadrilátero de Ortiz/Leroy

Este elemento, propuesto en[28], ha sido diseñado especialmente para abordar problemas de localización de deformaciones. El elemento no se plantea, al contrario que los anteriores, en coordenadas isoparamétricas, por lo que lo definiremos a través de su operador $\mathbf{G}$.

Si se considera que el campo de deformaciones mejorado se activa sólo en el centroide del elemento cuando se produce la bifurcación en este punto, se obtiene:

$$\mathbf{G}_0 = \Lambda \begin{bmatrix} g_1 n_1 + g_1 n_1 \\ g_2 n_2 + g_2 n_2 \\ g_1 n_2 + g_2 n_1 \end{bmatrix}, \tag{43}$$

donde

$$\Lambda = \begin{cases} \lambda/2, & \text{si } \boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{x} > 0; \\ (\lambda - 1)/2, & \text{si } \boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{x} < 0. \end{cases} \tag{44}$$

siendo $\boldsymbol{g}$ y $\boldsymbol{n}$ los vectores polarización y normal a la banda de localización según se definen en el Apartado A. λ es un parámetro que se calcula con la condición de verificar $\int_{\Omega_e} \mathbf{G}_0\, dV = 0$

D. ESTUDIO COMPARATIVO

Se presentan en este apartado diversos análisis comparativos de la respuesta de los distintos elementos definidos en el Apartado anterior frente a estados tensionales simples y su comportamiento frente a la localización de deformaciones. Debe aclararse que en estos análisis no se ha utilizado ninguna técnica específica para regularizar la respuesta, de modo que el tamaño de los propios elementos actúan como limitadores de localización. Mediante una modelización constitutiva adecuada es posible regularizar la respuesta como la que se ha propuesto recientemente para el hormigón[21,22] basada en teoría de mezclas.

Los análisis se han efectuado mediante el desarrollo de subrutinas de elemento que incorpora el algoritmo descrito en el Apartado C2.3. Estas subrutinas se han

incorporado al programa de elementos finitos de propósito general ABAQUS[17], en el que se han implementado como "subrutinas de usuario". De este modo se ha hecho uso del programa como interfase para el ensamblaje de la matriz de rigidez y el vector de cargas global, así como para la resolución del sistema de ecuaciones.

D1. Ejemplo 1: Problema de cortante no uniforme

Este problema ha sido inicialmente propuesto por Ortiz[28] y analizado por Steinmann[43]. Corresponde al análisis de un elemento cuadrangular, como el representado en la Figura 2_a, frente a una distribución de tensiones cortantes no uniforme.

Para provocar la localización, se ha empleado una curva de ablandamiento parabólica definida en deformaciones y tensiones efectivas de acuerdo a la Figura 2_b. El modelo de plasticidad empleado es el de Von Mises. Las características mecánicas del material se resumen:

$$E = 30000$$
$$\nu = 0.3$$
$$\sigma_y = 60$$
$$h_0 = 1000$$
$$k = -10^{-6}$$
$$\sigma_c = 2$$

donde σ_y es el límite elástico, h_0 es el módulo plástico inicial, k es la curvatura de la parábola y σ_c es la tensión de fluencia residual.

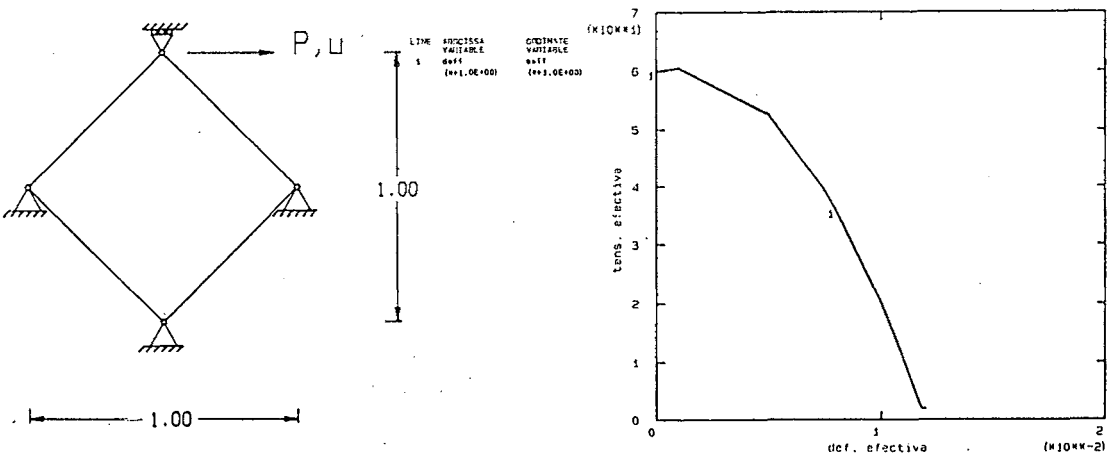


Figura 2. Problema de cortante no uniforme: a) Geometría . b) Curva de tensión-deformación plástica efectiva

La respuesta de los distintos elementos, queda recogida en la Figura 3, donde se representa la evolución de la fuerza resultante frente al desplazamiento impuesto.

De acuerdo a dicha figura, se observa que el elemento con una formulación $\bar{\mathbf{B}}$, no es capaz de reproducir la respuesta con ablandamiento. El elemento de Ortiz presenta

un mejor comportamiento frente a localización. El elemento de Taylor-Wilson Q1/E4 a pesar de no ser un elemento especialmente desarrollado para la localización, presenta una respuesta muy aceptable. El elemento de Simó-Rifai Q1/E5, reproduce una carga límite inferior a los demás, produciéndose una degradación en la respuesta más rápida que el resto de los elementos, en perfecta consonancia con los resultados de Steinmann[43] Asimismo, el elemento de Andelfinger-Ramm Q1/E7 coincide en su respuesta con el elemento Q1/E5.

A la vista de estos resultados se observa que los elementos Q1/E4, Q1/E5 y Q1/E7 presentan una mejor respuesta en este problema al elemento de Ortiz, específicamente desarrollado para problemas de localización.

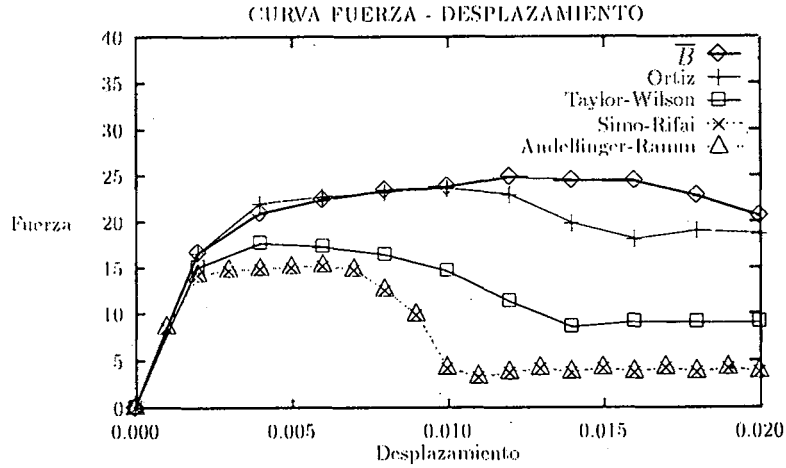


Figura 3. Problema de cortante no uniforme: Curva fuerza - desplazamiento

D2. Ejemplo 2: Problema de banda de cortante originado por una distribución periódica de inhomogeneidades

Este problema planteado por Ortiz[28], trata de reproducir la formación de una banda de cortante por la existencia de una distribución periódica de inhomogeneidades. Para representar la falta de homogeneidad, se eliminan un par de elementos de la diagonal de acuerdo a la Figura 4.

Las características mecánicas del material se definen mediante las siguientes parámetros:

$$E = 2\ 10^{11}$$
$$\nu = 0.3$$
$$h_0 = 5\ 10^9 \qquad 0 < \bar{\varepsilon}_p < 0.5\%$$
$$h_1 = -2\ 10^9 \qquad \bar{\varepsilon}_p > 0.5\%$$

Se ha adoptado un criterio de fluencia tipo Von Mises. Se ha realizado un análisis con movimientos impuestos en la dirección de la diagonal de acuerdo a la Figura 4.

La Figura 5_a representa la deformada, en la que se han empleado elementos cuadrangulares con formulación $\bar{\mathbf{B}}$. En dicha deformada, no se aprecia la formación de una banda de cortante. Sin embargo en la respuesta con elementos Q1/E4,

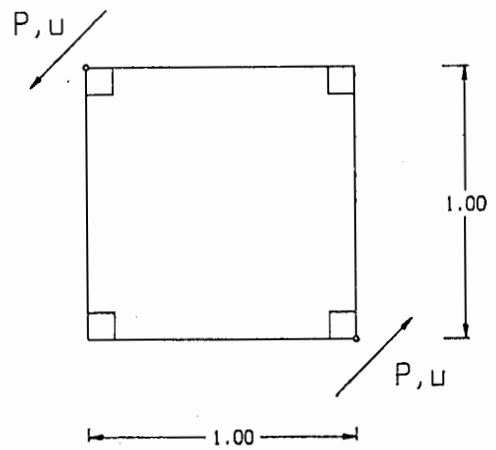


Figura 4. Problema de inhomogeneidades periódicas: Geometría

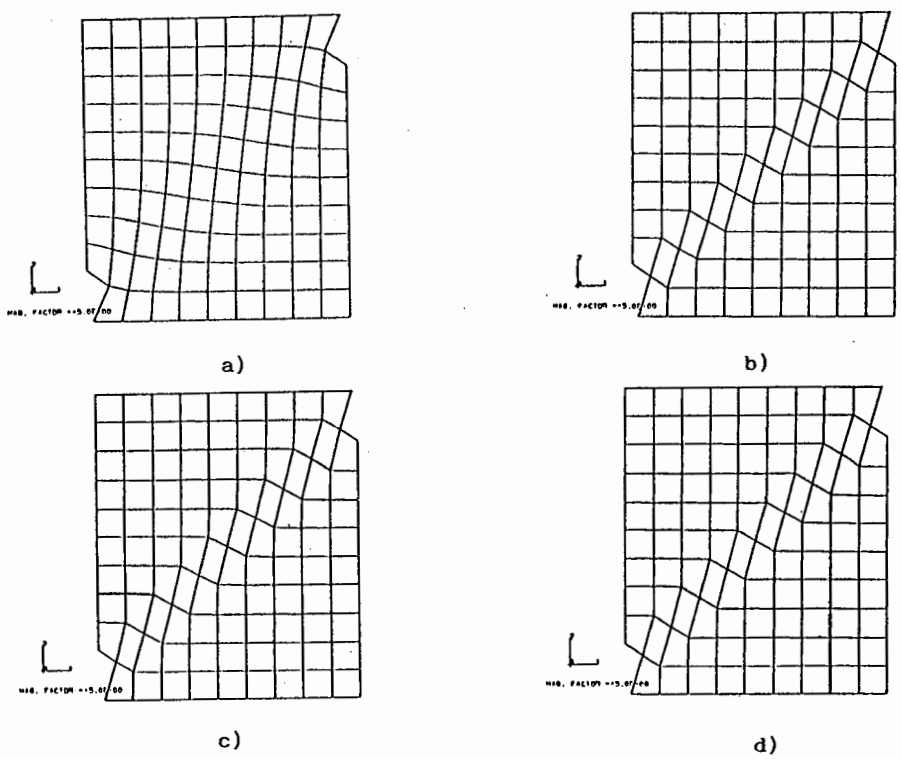


Figura 5. Problema de inhomogeneidades periódicas. Deformada con elementos: a) $\bar{B}$. b) Taylor-Wilson. c) Simó-Rifai. d) Andelfinger-Ramm

Q1/E5 y Q1/E7, de acuerdo a las Figuras 5_b, 5_c, y 5_d respectivamente, se aprecia la formación de una banda de anchura correspondiente al tamaño del elemento. En la Figura 6_a se observa la respuesta de los diferentes elementos en la curva carga-desplazamiento. Mientras que los elementos Q1/E4, Q1/E5 y Q1/E7 son capaces de representar el ablandamiento, el elemento $\bar{\mathbf{B}}$ prácticamente conserva una respuesta

constante. Conviene hacer notar la coincidencia casi total en la respuesta de los elementos con deformaciones supuestas.

La Figura 6_b representa el perfil de la distribución de deformaciones plásticas efectivas a través del ancho del sólido en su altura media. Se observa claramente cómo el elemento $\bar{\mathbf{B}}$ no es capaz de localizar la respuesta a diferencia de los elementos mejorados.

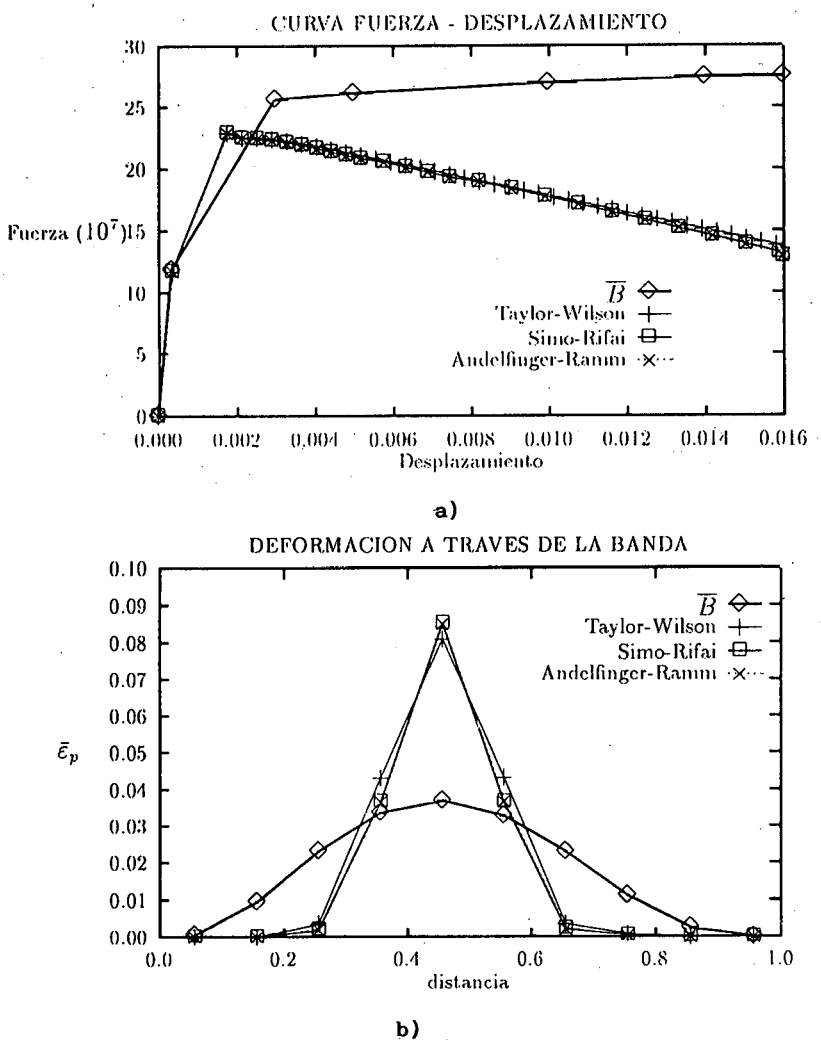


Figura 6. Problema de inhomogeneidades periódicas: a)Curva fuerza-desplazamiento. b) Perfil de deformaciones plásticas efectivas

D3. Ejemplo 3: Problema de compresión no uniforme

El presente estudio, trata de modelizar un ensayo convencional de compresión simple, en el que las restricciones impuestas en los contornos generan un estado de compresión no uniforme, suficiente como para provocar la iniciación de bandas de local Un ejemplo similar ha sido propuesto por Steinmann y Willam[42]

Las características mecánicas del material adoptadas:

$$E = 2\ 10^{11}$$
$$\nu = 0.3$$
$$h_0 = 5\ 10^9 \qquad 0 < \bar{\varepsilon}_p < 0.5\%$$
$$h_1 = -2\ 10^9 \qquad \bar{\varepsilon}_p > 0.5\%$$

Se ha considerado una formulación elastoplástica con criterio de fluencia Drucker-Prager con ángulo de rozamiento $\Phi = 20°$, ángulo de dilatancia $\Psi = 0°$ y tensión de fluencia en compresión $\sigma_c = 0.207\ 10^6$ y ablandamiento por deformación, de acuerdo a las características enumeradas. Se ha impedido el desplazamiento lateral en los contornos superior e inferior, lo que equivale a adoptar un rozamiento infinito entre la probeta y los platos de la prensa del ensayo. El análisis se ha realizado con desplazamiento vertical controlado.

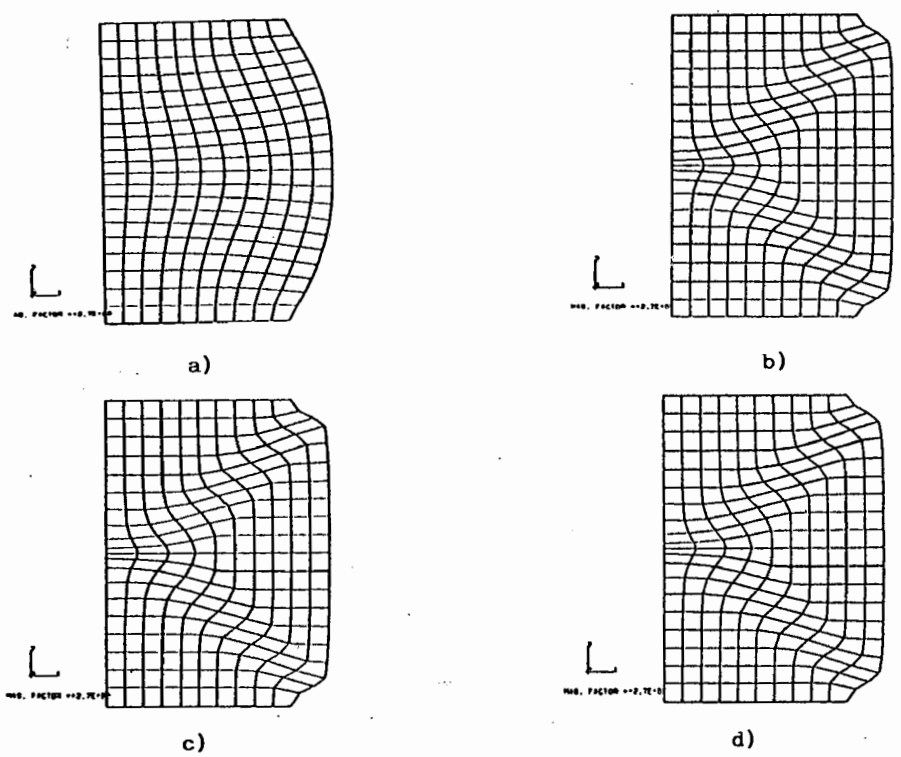


Figura 7. Problema de compresión no uniforme. Deformada con elementos: a) $\bar{B}$. b) Taylor-Wilson. c) Simó-Rifai. d) Andelfinger-Ramm

Se observa la diferente respuesta de los distintos elementos comparando la Figura 7_a, correspondiente a elementos $\bar{\mathbf{B}}$, con las Figuras 7_b, 7_c y 7_d correspondientes a los elementos Taylor-Wilson, Simó-Rifai y Andelfinger-Ramm respectivamente. Las Figuras 8_a y 8_b representan la curva carga-desplazamiento y el perfil de deformaciones

plásticas respectivamente, resultante de cada uno de los elementos. Conviene nuevamente destacar la práctica coincidencia en la respuesta de los diferentes elementos de deformaciones supuestas.

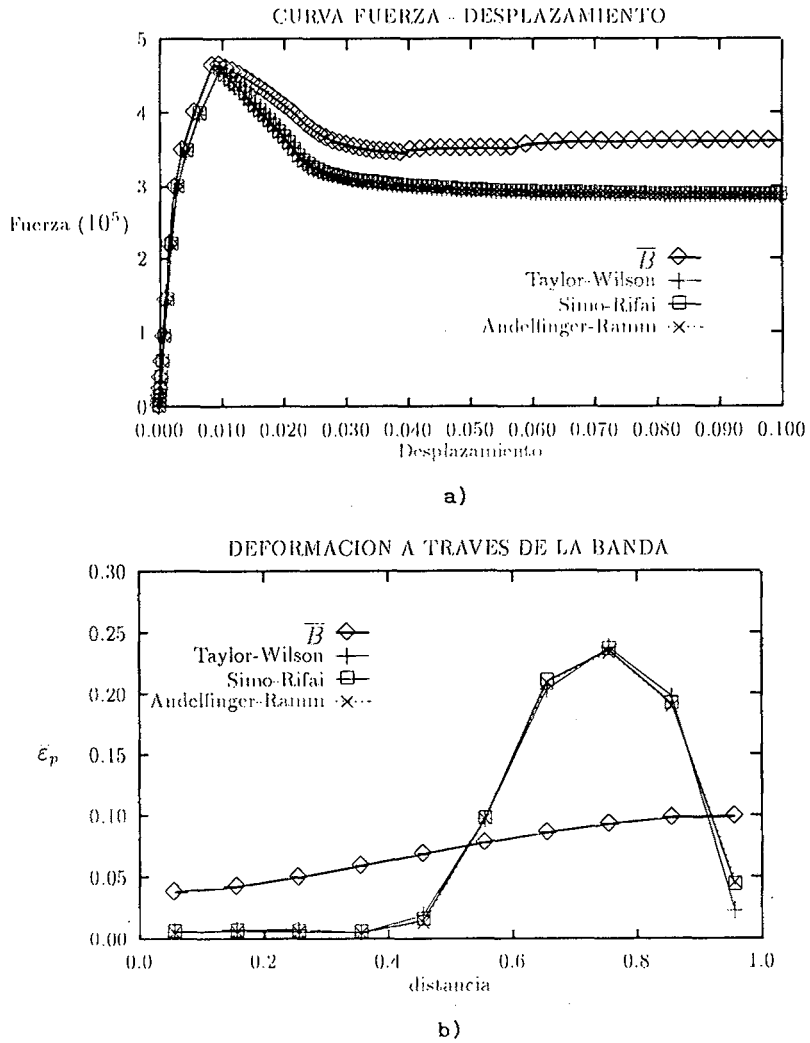


Figura 8. Problema de compresión uniforme: a) Diagrama fuerza-desplazamiento. b) Perfil de deformaciones plásticas efectivas

D4. Ejemplo 4: Problema de compresión con inhomogeneidad en el centro

El problema objeto de comparación consiste en la modelización de una probeta de material granular con una inhomogeneidad en el centro de la misma. Las características

mecánicas consideradas han sido:

$$
\begin{aligned}
E &= 2\ 10^{11} \\
\nu &= 0.3 \\
h_0 &= 5\ 10^{9} \qquad 0 < \dot{\bar{\varepsilon}}_p < 0.5\% \\
h_1 &= -2\ 10^{9} \qquad \bar{\varepsilon}_p > 0.5\%
\end{aligned}
$$

Se ha adoptado una formulación elastoplástica con función de fluencia Drucker-Prager con ángulo de rozamiento $\Phi = 20°$, ángulo de dilatancia $\Psi = 0°$ y tensión de fluencia en compresión de $0.207\ ; 10^6$.

Se observa en la Figuras 9_b, 9_c y 9_d, la formación de una banda de localización claramente diferenciada con los elementos Q1/E4, Q1/E5 y Q1/E7 a diferencia del elemento con formulación $\bar{\mathbf{B}}$ en la Figura 9_a.

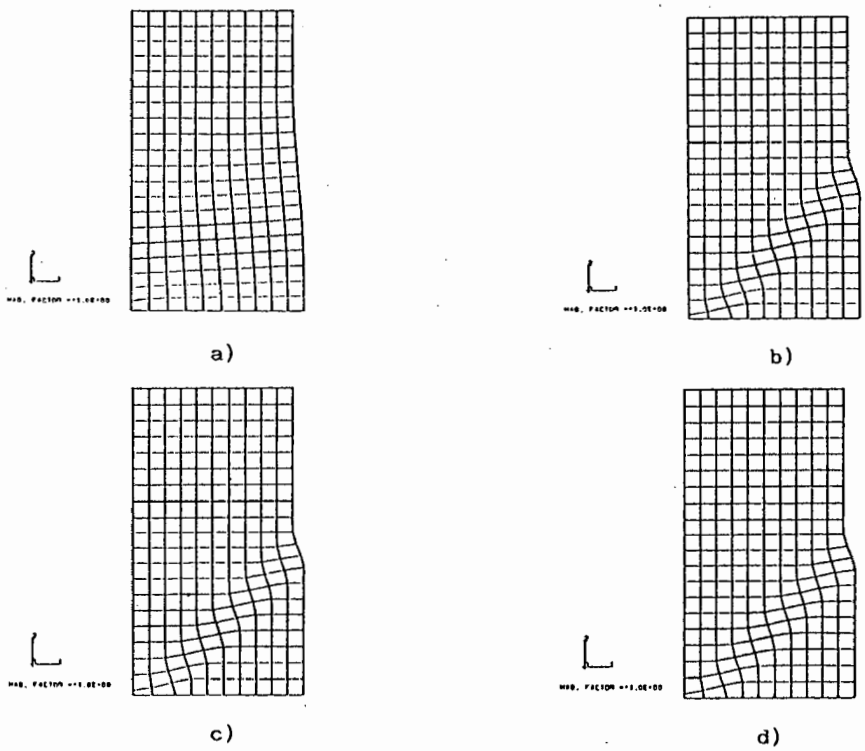
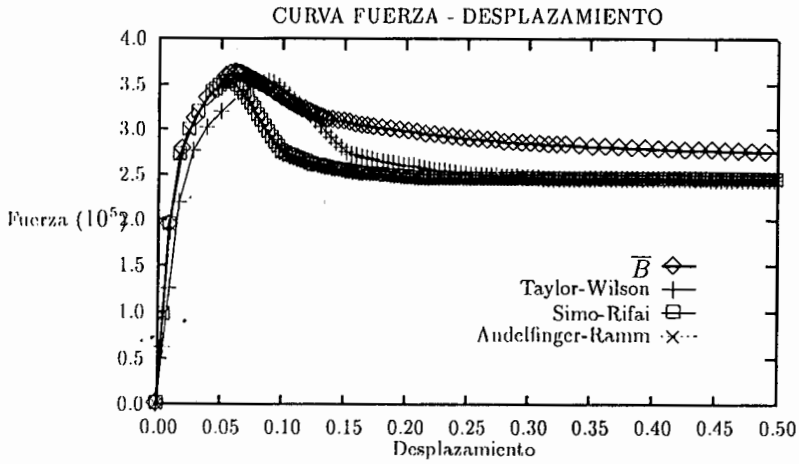


Figura 9. Problema de compresión con inhomogeneidad. Deformada con elementos: a) $\bar{B}$. b) Taylor-Wilson. c) Simó-Rifai. d) Andelfinger-Ramm

En la Figura 10_a se recogen las diferentes curvas fuerza - desplazamiento, donde se aprecia que los elementos de Simó-Rifai y Andelfinger-Ramm presentan una respuesta más flexible que la del elemento Wilson-Taylor. El perfil de deformaciones plásticas efectivas queda representado en la Figura 10_b, en la que se puede apreciar la poca capacidad del elemento $\bar{\mathbf{B}}$ para capturar el gradiente de deformaciones.



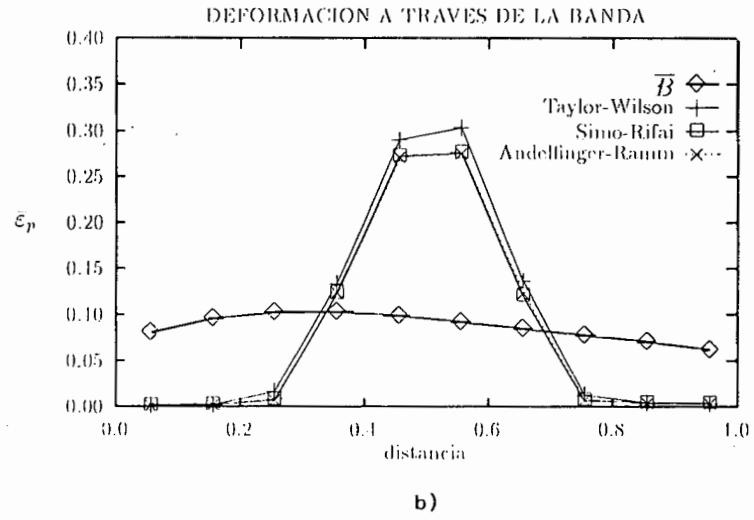


Figura 10. Problema de compresión con inhomogeneidad. a)Diagrama fuerza-desplazamiento. b) Perfil de deformaciones plásticas efectivas

CONCLUSIONES

Como consecuencia de los resultados obtenidos en el presente trabajo, se pueden extraer las siguientes conclusiones:

- Es posible un tratamiento numérico adecuado de los problemas de localización de deformaciones, siempre que se garantice:
  a) Una adecuada representación de gradientes elevados de deformación; esto exige de los elementos que puedan adoptar la cinemática de las bandas de localización sin dar lugar a un bloqueo artificial de la malla.
  b) La adopción de precauciones especiales de *regularización* para garantizar que la solución no dependa de la propia discretización empleada, al tratarse de un

problema matemáticamente mal planteado.

- Los elementos tradicionalmente aceptados para análisis no lineales, como los cuadriláteros $\bar{\mathbf{B}}$[18] basados en una integración reducida selectiva, capaces de tratar problemas de plasticidad incompresible sin bloqueo, se muestran sin embargo incapaces de representar adecuadamente la cinemática de las bandas de localización.
- Es posible obtener elementos mixtos de altas prestaciones y propósito general, mediante los métodos de deformaciones supuestas[39,40,41], capaces de una representación adecuada de la localización de deformaciones. Estos elementos engloban tanto los propuestos con anterioridad sin una justificación variacional por Wilson-Taylor[54] y para problemas exclusivamente lineales, así como otros desarrollados más recientemente por Andelfinger-Ramm[1] y Simó-Rifai[40]. Una ventaja importante de estos elementos es su robustez y carácter general, siendo directamente aplicables en códigos no lineales de elementos finitos, con el planteamiento tradicional de la integración de los modelos constitutivos tanto elásticos como elasto-plásticos.
- Los elementos de Wilson-Taylor, Simó-Rifai y Andelfinger-Ramm han producido resultados correctos y muy similares para los problemas de localización planteados, siendo ligeramente más simple la formulación de los elementos de Wilson-Taylor, al poseer 4 modos adicionales de deformación supuesta, frente a los 5 ó 7 modos de los otros elementos respectivamente. Tan sólo en la prueba más extrema, la del corte en dirección diagonal de un elemento, se obtuvo con el elemento de Wilson-Taylor un resultado ligeramente más rígido, aunque aceptable, en relación a los otros elementos.
- Los resultados obtenidos mediante los elementos de deformaciones supuestas en los ejemplos aquí analizados han evidenciado un comportamiento igual o superior a otros elementos desarrollados específicamente para problemas de localización de deformaciones[28]. A esto se debe unir una mayor sencillez y robustez en la modelización, lo que los hace más adecuados para su uso en análisis de propósito general.
- Es necesario recalcar que estos resultados no garantizan la consistencia de la solución y su independencia de la malla, que debe ser garantizada mediante un procedimiento de regularización apropiado. Esta regularización puede venir dada por una modelización constitutiva adecuada, como la propuesta recientemente para hormigón[21,22], basada en teorías de mezclas.

REFERENCIAS

1. U. Andelfinger, E. Ramm y D. Roehl, "2D- y 3D- Enhanced assumed strain elements and their application in plasticity", *3rd Int. Conf. on Comp. Plast*, Barcelona, (1992).
2. U. Andelfinger y E. Ramm, "EAS-Elements for 2D- 3D-, plate and shell structures and their equivalence to HR-Elements", *Int. J. Num. Meth. Eng.*, (1992).
3. Y. Bai y B. Dodd, *"Adiabatic Shear Localization. Occurrance, Theories and Applications"*, Pergamon Press, Oxford, (1992).
4. Z. P. Bazant y G. Pijaudier-Cabot, "Nonlocal continuum damage, localization instability

and convergence", *J. Appl. Mech.*, Vol. **55**, pp. 287-293, (1988).
5. T. Belytschko y W. Bachrach, "Efficient implementation of quadrilaterals with high coarse-mesh accuracy", *Comp. Meth. Appl. Mech. and Eng.*, Vol. **54**, pp. 279-301, (1986).
6. T. Belytschko y D. Lasry, *"Localization limiters and numerical strategies for strain softening materials"*, Mazars, J. and Bazant, Z. (eds). "Strain localization and size effect due to cracking and damage", *"Proc. of France-US wor"*, (1989).
7. T. Belytschko, J. Fish y B. E. Engelmann, "A finite element with embedded localization zones", *Comp. Meth. in Appl. Mech and Eng.*, Vol. **70**, pp. 57-89, (1988).
8. R. De Borst, "Bifurcations in finite element models with a non-associated flow law" *Int. J. Num. and Analyt. Meth. Geomech.*, Vol. **12**, pp. 99-116, (1988).
9. E. Cosserat, y F. Cosserat, *"Théorie des Corps Deformables"*, Herman, Paris, (1909).
10. P. Cundall, "Shear by initiation and evolution in frictional materials", *"Proc. Conf. Mechanics Computing in 1990's and beyond"*, Struct. and Mat. Mech. ASME, pp. 1279-1289, (1991).
11. E Dvorkin, M. Cuitiño y Goiag, "Finite elements with displacement interpolated embedded localization lines insensitive to mesh size and distortions", *Int. J. Num. Meth. Eng.*, Vol. **30**, pp. 541-564, (1990).
12. E. Dvorkin, y A. Assanelli, "2D finite elements with displacement interpolated embedded localization lines: The analysis of fracture in frictional materials", *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.*, Vol. **90**, pp. 829-844, (1991).
13. J. Fish y T. Belytschko, "A finite element with unidirectionally enriched strain field for localization analysis", *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng*, Vol. **78**, pp. 181-200, (1990).
14. D. P. Flanagan y T. Belytschko, "A uniform strain hexaedron and quadrilateral with orthogonal hourglass control", *Int. J. Num. Meth. Eng.* Vol. **17**, pp. 679-706, (1981).
15. J. Hadamard, *"Leçons sur le propagation des ondes et las equations de l'hydrodynamique"*, Hermann, Chap. 6, Paris, (1903).
16. R. Hill y Hutchinson, "Bifurcation phenomena in the plane tension tests", *J. Mech y Phys. of Solids*, Vol. **23**, pp. 239-264, (1975).
17. Hibbitt, Karlsson & Sorensen, *"ABAQUS User's manual"* HKS, Inc.
18. T. J. R. Hughes, "Generalization of selective integration procedures to anisotropic and nonlinear media" *Int. J. Num. Meth. Eng.*, Vol. **15** pp. 1413-1418, (1980).
19. B. Loret, y J. H. Prevost, "Dynamic strain localization in elasto-(visco-) plastic solids, Part I. General formulation and one-dimensional examples", *Comp. Meth. Appl. Mech. and Eng.*, Vol. **83**. pp. 247-273, (1990).
20. J. Mandel, "Conditions de stabilité et postulat de Drucker", In *"Rheology and Soil Mechanics"*. Ed. by Krautchenko y P. M. Siriays, Springer, pp. 58-68, New York, (1966).
21. F. Martínez, "Análisis de fenómenos de localización de deformaciones en materiales cohesivo-friccionales, *Tesis Doctoral* Universidad Politécnica de Madrid, (1993).
22. F. Martnez, J. M. Goicolea y M. Ortiz, "Numerical Analysis of Strain Localization in Concrete Specimens", *"Proc. EURO-C 1994. Computational Modelling of Concrete Structures"*, Innsbruck, Austria, (1994).
23. H. B. Muhlhaus y Vardoulakis, "The thickness of shear bands in granular materials", *Geotech.*, Vol. **37**, No 3, pp. 271-283, (1987).
24. A. Nacar, A. Needleman y M. Ortiz, "A finite element method for analyzing localization in rate dependent solids at finite strains", *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.*, Vol. **73** pp. 235-258, (1989).
25. J. C. Nagtegaal D. M. Parks y J. R. Rice, "On numerically accurate finite element solutions in the fully plastic range", *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.*, Vol. **4**, pp. 153-177, (1974).

26. A. Needleman, "Material rate dependance and mesh sensivity in localization problems", *Comp. Meth. Appl. Mech. and Eng.*, Vol. **67**, pp. 69-85, (1988).
27. S. Oller, J. Oliver, M. Cervera y E. Oñate, "Simulación de procesos de localización en mecánica de sólidos mediante un modelo plástico, *I Congreso de Métodos Numéricos en Ingeniería*,SEMNI, Las Palmas de G. C., (1990).
28. M. Ortiz, Y. Leroy y A. Needleman, "A finite element method for localized failure analysis", *Comp. Meth. in Appl. Mech. and Eng.*, Vol. **61**, pp. 189-214, (1987).
29. M. Ortiz, y J. J. Quigley IV, "Element design and adaptive meshing in strain localization problems", *"Proc. 2nd Int. Cong. on Computational Plasticity"*, Barcelona, (1989).
30. M. Ortiz y J. J. Quigley IV, "Adaptive mesh refinement in strain localization problems", *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.*, Vol. **90**, pp. 781-804, (1991).
31. T. H. Pian y K. Sumihara, "Rational approach for assumed stress finite elements", *Int. J. Num. Meth. Eng.*, Vol. **20**, pp. 1685-1695, (1984).
32. St. Pietruszczak y Z. Mroz, "Finite element analysis of deformation of strain-softening materials", *Int. J. Num. Meth. Eng.*, Vol. **17**, pp. 327-334, (1981).
33. J. H. Prevost y B. Loret, "Dynamic strain localization in elasto- (visco-) plastic solids, Part II. Plane strain examples" *Comp. Meth. Appl. Mech. and Eng.*, Vol. **83**, pp. 275-294, (1990).
34. B. D. Reddy y J. C. Simó, "Stability and convergence of a class of enhanced strain methods", *Dep. Appl. Math. University of Cape Town*, Report **No 174**, (1992).
35. J. R. Rice, "The localization of plastic deformation", *"Theoretical and applied Mechanics. Proc. 14th Int. Congress Theoret. and Appl. Mech."*, W.T. Koiter ed, pp. 207-220, North Holland, Amsterdam, (1977).
36. W. J. Rudnicki y J. R. Rice, "Conditions for the localization of deformation in pressure-sensitive dilatant materials", *J. Mech. Phys. Solids*, Vol. **23**, pp. 371-394, (1975).
37. K. Runesson, N. S. Ottosen, y D. Peric, " Discontinuous bifurcation s of elastic-plastic solutions at plane stress and plane strain" *Int. J. of Plasticity*, Vol. **7**, pp. 99-121, (1991).
38. J. C. Simó y R. L. Taylor, "Consistent tangent operators for rate-independent elastoplasticity", *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.*, Vol. **48**, pp. 101-118, (1985).
39. J. C. Simó y T. J. R. Hughes, "On the variational foundations of assumed strain methods", *J. Appl. Mech. ASME*, Vol. **53**, pp. 51-54, (1986).
40. J. C. Simó, y M. S. Rifai, "A class of mixed assumed methods and the method of incompatible modes", *Int. J. Num. Meth. Eng.*, Vol. **29**, pp. 1595-1638, (1990).
41. J. C. Simó, y F. Armero, "Geometrically nonlinear enhanced strain mixed methods and the method of incompatible modes", *Int. J. Num. Meth. Eng.*, Vol. **33**, pp. 1413-1449, (1992).
42. P. Steinmann y K. Willam, "Performance of enhanced finite element formulations in localized failure computations", *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.*, Vol. **90**, pp. 845-867, (1991).
43. P. Steinmann, y K. Willam, "Finite elements for capturing localized failure", *Arch. Appl. Mech.*, **61**, pp 259-275, (1991).
44. S. Sture, S. y H. Y. Ko, "Strain-softening of brittle geologic materials", *Int. J. Num. and Anal. Meth. in Geomech.*, Vol. **2**, pp. 237-253, (1978).
45. V. Tvergaard, A. Needleman y K. Lo, "Flow localization in the plane strain tensile test", *J. Mech. Phys. Solids*, Vol. **29**, No 2, pp. 115-142, (1981).
46. J. G. Van Mier, "Multiaxial strain softening of concrete: Part I Fracture", *Materiaux et Constructions*, Vol. **19**, No 111, (1986).

47. I. Vardoulakis, M. Goldsheider y G. Gudehus, "Formation of shear bands in sand bodies as a bifurcation problem", *Int. J. for Num. and Anal. Meth. in Geomech.*, Vol. **2**, pp. 99-128, (1978).
48. I. Vardoulakis, "Bifurcation analysis of the triaxial test on sand samples", *Acta Mech.*,Vol. bf 32, pp. 35-39, (1979).
49. I. Vardoulakis, y E. C. Aifantis, "Gradient dependent dilatancy and its implications in shear banding and liquefaction", *Ing.-Archiv.* Vol. 59, pp. 197-208, (1989).
50. K. Washizu, *"Variational Methods in Elasticity and Plasticity"*, Pergamon Press, Oxford, (1968).
51. W. R. Wawersik, y W. F. Brace, "Post failure behavior of a granite and a diabase", *Rock Mech.*, Vol. **3**, pp. 61, (1971).
52. S. L. Weissman, y R. L. Taylor, "Treatment of internal constraints by mixed finite element methods: Unification of concepts", *Int. J. Num. Meth. Eng.*, Vol. **33**, pp. 131-141, (1992).
53. S. L. Weissman, y R. L. Taylor, "A unified approach to mixed finite element methods: Application to in-plane problems", *Comp. Meth. Appl. Mech. and Eng.*,Vol. **98**, pp. 127-151, (1992).
54. E. L. Wilson, R. L. Taylor, W. P. Doherty, y J. Ghaboussi, "Incompatible displacement models", *Num. and Comp. Meth. in Struct. Mech*, Academic Press, (eds. S. T. Fenves et al), pp. 43-57, (1973).
55. C. Zener y J. H. Holloman, "Effect of strain rate upon plastic flow of steel", *J. Appl. Phys.*, Vol. **15**, pp. 22-32, (1944).