2°SYMP. SOBRE APLICACIONES DE LOS ELEMENTOS FINITOS A LA INGENIERIA
BARCELONA 9-12/JUNE/1986

MODELOS NUMERICOS NO LINEALES MEDIANTE INTEGRACION EXPLICITA

J. Goicolea y J. Martí

Principia España, S.A.
Orense, 36 - 28020 Madrid

RESUMEN

Se presentan aquí técnicas de diferencias finitas explícitas para mecánica de sólidos no lineal, con una familia de elementos nuevos (Discretización Mixta Corregida). Se obtienen de esta forma modelos fiables y robustos para análisis no-lineales, evitando a la vez los modos de energía nula y la rigidización artificial de la malla. Para la interacción de cuerpos se emplea una lógica generalizada de contactos que se acopla bien al esquema explícito. Por fin, se presentan algunos ejemplos de aplicación a distintos casos dinámicos y cuasi-estáticos.

INTRODUCCION

Los esquemas de resolución de problemas dinámicos no lineales en mecánica de sólidos se pueden clasificar en explícitos e implícitos. En los primeros no se requiere el ensamblamiento de las matrices (rigidez, masa, amortiguamiento) del sistema, ya que las ecuaciones del movimiento se pueden desacoplar y basta con aproximaciones locales. En cambio, los métodos implícitos requieren una triangularización de la matriz de rigidez para la resolución incremental del sistema de ecuaciones globales. Esta diferencia fundamental condiciona fuertemente la arquitectura de los programas numéricos y las características y aplicabilidad de ambos métodos.

métodos explícitos

El desacoplamiento local en los esquemas explícitos permite una estructura más sencilla y a la vez más flexible para los modelos numéricos. Se admite prácticamente cualquier tipo de ecuaciones

constitutivas del material, con tal de que se puedan plantear de forma explícita:

$$\overset{\circ}{\underset{\sim}{\sigma}} = F(\underset{\sim}{E},\underset{\sim}{d},\underset{\sim}{\sigma},\underset{\sim}{K},T) \qquad (1)$$

donde $\overset{\circ}{\underset{\sim}{\sigma}}$ es una derivada "objetiva" del tensor de tensiones
$\underset{\sim}{E}$ es el tensor de deformaciones de Green
$\underset{\sim}{d}$ es el tensor de velocidad de deformaciones
$\underset{\sim}{K}$ es un conjunto de parámetros del material
T es la temperatura

Las grandes deformaciones no ocasionan problemas, ya que la geometría se puede actualizar tras cada intervalo de tiempo, sin necesidad de volver a ensamblar y triangularizar matrices globales. Dentro de cada intervalo, las deformaciones son pequeñas.

Las condiciones de contorno no lineales (p.ej. contactos) se pueden representar directamente a nivel local sin dificultad. Asímismo es posible la consideración simultánea de fenómenos complejos como efectos termomecánicos acoplados.

El precio que se paga por el desacoplamiento local de las ecuaciones de equilibrio es una limitación del intervalo de tiempo de integración, por razones de estabilidad numérica (Condición de Courant). Para problemas dinámicos con frecuencias bajas dominantes (vibraciones inerciales) esta limitación puede ocasionar un coste computacional excesivo. Por el contrario, los métodos explícitos son muy eficaces para problemas dominados por altas frecuencias (propagación de ondas de tensión), de corta duración, o muy no-lineales. Un campo especialmente adecuado de aplicación son los problemas de impacto [8].

métodos implícitos

Los esquemas implícitos efectúan una resolución simultánea del sistema global de ecuaciones incrementales de equilibrio. La ventaja fundamental es que, aunque los algoritmos de integración en el tiempo son más complejos, pueden ser incondicionalmente convergentes, con lo cual se permiten intervalos de integración grandes.

Sin embargo, los métodos implícitos poseen ciertos inconvenientes. Las matrices de coeficientes requieren un almacenamiento mucho mayor que los métodos explícitos, llegando a ser prohibitivo para modelos tridimensionales grandes. En problemas no-lineales, la mayor amplitud de los incrementos de

carga ocasiona que el comportamiento incremental no se pueda suponer lineal, exigiendo procesos iterativos para la solución (p.ej. Newton-Raphson). Asimismo, pueden ser necesarios algoritmos más sofisticados para modelizar el comportamiento de materiales no lineales (p.ej. el retorno a la superficie de fluencia en modelos elastoplásticos). El planteamiento de ecuaciones globales en los métodos implícitos presenta una mayor dificultad para modelizar fenómenos no-lineales complejos (bien constitutivos o de contorno) que no se puedan linearizar fácilmente.

A pesar de la convergencia condicional de los modelos explícitos, éstos tienen una robustez inherente mayor, al admitir sin problemas rigideces singulares o reblandecimiento del material.

Cabe la utilización de métodos explícitos para análisis cuasi-estáticos, empleando relajación dinámica [12]. Asimismo existen esfuerzos recientes por desarrollar métodos iterativos (de relajación explícita) para la solución de ecuaciones simultáneas en modelos implícitos, como los métodos cuasi-Newton [2] o del gradiente conjugado [1]. En este ámbito se pueden enmarcar también los algoritmos "Elemento por Elemento" [6].

En este artículo se describen modelos de diferencias finitas con integración explícita en el tiempo. A continuación se resume la formulación, que ha sido presentada de forma más detallada en [4] y [11].

MODELO DE DIFERENCIAS FINITAS

Se utiliza una malla Lagrangiana, que se deforma con el material. La descripción se basa en la configuración deformada, a través de los tensores de tensiones de Cauchy ($\underset{\sim}{\sigma}$) y de velocidad de deformaciones ($\underset{\sim}{d}$).

La integración en el tiempo se realiza mediante un ciclo computacional. En cada instante, las deformaciones incrementales se calculan a partir de las velocidades nodales por diferencias finitas. Utilizando las ecuaciones constitutivas se obtienen las nuevas tensiones. Estas se integran alrededor de cada nodo para obtener fuerzas. Las ecuaciones de equilibrio arrojan las nuevas velocidades, lo que permite recomenzar el ciclo para el siguiente intervalo de tiempo.

discretización espacial

La malla se basa en celdillas elementales de deformación constante, bien triangulares (casos 2-D y axisimétrico) o tetrahédricas (3-D). El gradiente de velocidades en el centro de una celdilla se aproxima mediante diferencias finitas:

$$[v_{i,j}] = [VR(i,N)][XR(N,j)]^{-1} \qquad (2)$$

donde v_i son las velocidades;
$VR(i,N)$ son las velocidades relativas de cada nodo N respecto a uno tomado como referencia;
$XR(N,j)$ son las coordenadas relativas de cada nodo N.

Un procedimiento alternativo para efectuar esta interpolación es mediante integrales de contorno [13].

Los tensores de velocidad de deformaciones $\underset{\sim}{d}$ y de giros $\underset{\sim}{w}$ se obtienen mediante

$$d_{ij} = (v_{i,j} + v_{j,i})/2 \qquad (3)$$

$$w_{ij} = (v_{i,j} - v_{j,i})/2 \qquad (4)$$

Es conocido que mallas de elementos triangulares o tetrahédricos de deformación constante se "atenazan" para el flujo plástico incompresible [10]. Este problema se soluciona mediante una "Discretización Mixta" [7], promediando las deformaciones volumétricas para grupos de varias celdillas:

$$\Delta\epsilon_v^C := \Delta\epsilon_v^E = [\sum \Delta\epsilon_v^C V^C]/\sum V^C \qquad (5)$$

donde $\Delta\epsilon_v$ son los incrementos de deformación volumétrica;
E es el grupo de celdillas C que forma un elemento de Discretización Mixta, 2 triángulos por cuadrilátero en 2-D, 5/6 tetrahedros por hexahedro en 3-D;
V^C son los volúmenes de las celdillas.

La Discretización Mixta modeliza correctamente el flujo plástico incompresible, evitando al mismo tiempo los modos de energía nula ("Hourglassing"). En cambio, para ciertos casos con distorsiones extremas, se pueden producir cruzamientos en la malla de celdillas básicas. Esto es debido a que aunque el volumen de una celdilla tienda a cero, las deformaciones volumétricas unitarias en el grupo promediado se mantienen en valores finitos.

Este problema se puede solucionar mediante una corrección a la Discretización Mixta [4]:

$$\Delta\epsilon_v^C := \Delta\epsilon_v^E + \alpha \min(\Delta\epsilon_v^C, 0)[V^E/MV_C - 1] \qquad (6)$$

donde $\Delta\epsilon_v^E$ es el promedio sin corregir (ec. (5))
α es un coeficiente empírico (α =0.01 recomendado por defecto)
M_E es el número de celdillas en el grupo
V^E es el volumen total del grupo

Esta correción conserva la media volumétrica, a la vez que causa un crecimiento asintótico de los incrementos de deformación (y por lo tanto de la resistencia) al tender a cero el volumen de una celdilla básica.

Ecuaciones constitutivas

Las ecuaciones constitutivas se basan en un predictor hipoelástico, que luego es corregido para el tipo de comportamiento deseado (Elastoplástico, Newtoniano, Elasto-viscoplástico ...). La ley Hipoelástica es

$$\overset{\circ}{\underset{\sim}{\sigma}} = \lambda \mathrm{tr}(\underset{\sim}{d})\, \underset{\sim}{I} + 2G\underset{\sim}{d} - \alpha(3\lambda+2G)\dot{T}\, \underset{\sim}{I} \qquad (7)$$

donde λ, G son las constantes elásticas de Lamé;
$\underset{\sim}{I}$ es el tensor identidad;
$\dot{T}$ es la temperatura;
α es el coeficiente de expansión térmica.

Utilizando la derivada de Jaumann $\overset{\nabla}{\sigma}$, el algoritmo de actualización de las tensiones hipoelásticas resulta

$$\underset{\sim}{\sigma}_E^{n+1} = \underset{\sim}{\sigma}^n + [\overset{\nabla}{\underset{\sim}{\sigma}}^{n+1/2} - \underset{\sim}{\sigma}^{n+1/2}\underset{\sim}{w} - \underset{\sim}{w}\,\underset{\sim}{\sigma}^{n+1/2}]\Delta t \qquad (8)$$

La condición de fluencia es

$$F(\underset{\sim}{\sigma}, Q) = 0 \qquad (9)$$

donde Q es un conjunto de parámetros de endurecimiento plástico. Si se excede la condición (9) las tensiones se devuelven a la superficie de fluencia mediante un retorno normal (método del retorno radial [13]):

$$\underset{\sim}{\sigma}^{n+1} = \underset{\sim}{\sigma}_E^{n+1} - (\beta/3)\frac{\partial F}{\partial \underset{\sim}{\sigma}} \qquad (10)$$

donde β es un factor escalar, de forma que $F(\underset{\sim}{\sigma}^{n+1}, Q) = 0$. Este retorno normal define implícitamente un flujo plástico asociativo:

$$\underset{\sim}{d}^{p} = [(\beta/3)/(2G)] \frac{\partial F}{\partial \underset{\sim}{\sigma}} \qquad (11)$$

Equilibrio

Integrando sobre una superficie pequeña $S^{(k)}$ alrededor de cada nodo k, y aplicando la ley de conservación del momento, se obtiene

$$\ddot{\underset{\sim}{u}}^{(k)} = [\int_{S^{(k)}} \underset{\sim}{\sigma}\, \underset{\sim}{n} dS + M^{(k)} \underset{\sim}{f} + \underset{\sim}{R}^{(k)}]/M(k) \qquad (12)$$

donde $\ddot{\underset{\sim}{u}}^{(k)}$ es la aceleración del nodo k;
$M^{(k)}$ es la masa nodal concentrada;
$\underset{\sim}{f}$ son las fuerzas de masa;
$\underset{\sim}{R}^{(k)}$ son fuerzas concentradas.

Integración en el tiempo

Las nuevas velocidades y desplazamientos se obtienen mediante diferencias centrales:

$$\dot{\underset{\sim}{u}}^{n+1/2} = \dot{\underset{\sim}{u}}^{n-1/2} + \ddot{\underset{\sim}{u}}^{n} \Delta t \qquad (13)$$

$$\underset{\sim}{u}^{n+1} = \underset{\sim}{u}^{n} + \dot{\underset{\sim}{u}}^{n+1/2} \Delta t \qquad (14)$$

La condición de Courant para la estabilidad exige

$$\Delta t < h_{min}/c_p \qquad (15)$$

donde h_{min} es la mínima dimensión de cualquier celdilla;
c_p es la velocidad de ondas de compresión elásticas.

Contactos

Las fuerzas de interacción se calculan permitiendo la penetración entre superficies, e imponiendo fuerzas de penalización proporcionales a la penetración ("penalty method"):

- Fuerza Normal $F_c^N = K^N p^N$ (16)

- Fuerza Tangencial $F_c^S = \min(K^S p^S, F_c^N \mu)$ (17)

donde K^N, K^S son las rigideces normal y tangencial de los contactos;
p^N, p^S son las componentes normal y tangencial de la penetración;
μ es el coeficiente de rozamiento.

La ley tangencial (17) define un círculo cinemático de deslizamiento de radio $F_c^N \mu / K^S$. Hay que notar que la penetración $\underset{\sim}{p}$ es un vector ligado a la malla Lagrangiana, y requiere por tanto una formulación corrotacional para su actualización, semejante a la ec. (8).

Las rigideces de los contactos deben ser suficientemente grandes para evitar penetraciones excesivas, pero no tanto que penalicen la estabilidad de la integración. Esto se consigue de una forma sencilla haciendo la rigidez proporcional a la masa nodal del nodo que penetra, m^I:

$$K = k m^I / \Delta t_c^2 \qquad (18)$$

donde Δt_c es el intervalo de tiempo crítico, ec.(15)
k es una constante de proporcionalidad (0.1 por defecto)

El efecto de los contactos se incluye sin dificultad en el ciclo computacional explícito. Las penetraciones se calculan paralelamente a las deformaciones, y las fuerzas de interacción se aplican como fuerzas nodales en la ec. (12).

Los contactos se pueden clasificar según la distancia del nodo intruso a los bordes de la cara penetrada en :

- o Nodo-Nodo;
- o Nodo-Arista;
- o Nodo-Cara (3-D).

Para esto es necesario definir unas tolerancias. Asimismo, se necesita una cierta capacidad de detección automática de contactos nuevos y de deslizamiento o cambios topológicos en los contactos existentes. Los algoritmos para gestionar esto de forma general revisten cierta complicación sobre todo en el caso tridimensional [11].

EJEMPLOS DE APLICACION

Se presentan a continuación varios ejemplos, cuya solución numérica se ha obtenido con los programas PR2D [4] y PR3D [11].

Distribución de tensiones en lámina esférica

Se trata de una lámina esférica gruesa sometida a presión interna p, de forma que la parte interior esté plastificada. La solución teórica [5] arroja:

- radio c de la zona plastificada en función de p

$$p = 2Y\mathrm{Ln}(c/a)+(2Y/3)(1-c^3/b^3)$$

donde Y es la tensión de fluencia uniaxial;
a es el radio interno;
b es el radio externo.

- tensiones en la zona elástica (c < r < b)

$$\sigma_r = -(b^3/r^3-1)2Yc^3/3b^3$$

$$\sigma_\theta = (b^3/2r^3+1)2Yc^3/3b^3$$

- Tensiones en la zona plástica

$$\sigma_r = -2Y\mathrm{Ln}(c/r) - 2Y(1-c^3/b^3)/3$$

$$\sigma_\theta = Y + \sigma_r$$

Numéricamente el problema se resolvió discretizando un sector de 30° con malla axisimétrica de 10x8 cuadriláteros (fig.1). El problema (cuasiestático) se resolvió por relajación dinámica, mediante amortiguamiento viscoso de masa y rigidez. Los resultados (fig.2) están muy cercanos a la teoría.

Colapso axisimétrico de tubos.

El presente ejemplo forma parte de un programa de investigación experimental y numérica [3,4] sobre el colapso de tubos para su utilización como mecanismos disipadores de energía en impactos. Se analiza aquí el colapso bajo compresión axial de un tubo de aluminio con sección circular, pandeando en forma de acordeón.

El análisis se hizo con elementos axisimétricos (fig.3). El material se consideró elastoplástico con endurecimiento isótropo. En el tubo se producen tres dobleces secuencialmente que se empujan unos a otros y rozan entre sí. Las deformaciones unitarias obtenidas tanto en el modelo como en el experimento exceden 1.20. Las predicciones numéricas se corresponden muy bien con los experimentos, tanto en la deformada del tubo (fig.4) como en la ley fuerza-desplazamiento (fig.5).

Extrusión de un cilindro de aluminio.

Se incluyen por último resultados de una modelización termomecánica tridimensional de un proceso de extrusión. Se trata de un ejemplo de

validación cuyos resultados fueron contrastados con experimentos [9].

La pieza ensayada es un cilindro recto circular que se comprime axialmente un 30% de su altura, entre una placa lisa rígida inferior y un bloque superior rugoso y también rígido. El bloque ocupa tan sólo una franja del cilindro, y tiene un agujero cuadrado por el que se extruye el aluminio. Las características del material son:

- Material elastoplástico con ley de endurecimiento uniaxial $\sigma = 195\epsilon^{0.2}$ MPa.

- Conductividad térmica k=174W/m °K, calor específico C_{pl}=900J/kg °K, Expansión térmica =23.4x10^{-6} °K

El trabajo producido por la fluencia plástica se transforma en calor. Los procesos térmico y mecánico están acoplados y se resuelven simultáneamente.

El modelo numérico cubre sólo 1/4 de la pieza debido a las simetrías existentes (fig.6). En la figura 7 se comparan las curvas fuerza-indentación predichas con los resultados experimentales. En la figura 8 se presentan las líneas de igual temperatura obtenidas sobre la pieza deformada. Se observa una franja más caliente coincidiendo con la zona de deformaciones cortantes mayores.

REFERENCIAS

[1] FLANAGAN, D.P. y BELYTSCHKO, T. (1981): "Simultaneous Relaxation in Structural Dynamics", Journal of the Engineering Mechanics Division, ASCE 107, pp 1039-1055.

[2] GERADIN, M., HOGG, M. e IDELSOHN, S. (1983): "Implicit Finite Element Methods", en "Computational methods for transient analysis", T. Belytschko y T.J.R. Hughes eds., North Holland, pp 417-472.

[3] GOICOLEA, J. (1982): "Análisis de disipación de energía mediante integración explícita", en "Aplicaciones del método de los elementos finitos en ingeniería" (1er. Simposium, Barcelona), E. Oñate et al. editores, pp V151-163.

[4] GOICOLEA, J. (1985): "Numerical Modelling in Large Strain Plasticity with Application to Tube Collapse Analysis", Tesis Ph.D., Universidad de Londres.

[5] HILL, R.: "The Mathematical Theory of Plasticity", Clarendon Press (Oxford).

[6] HUGHES, T.J.R., LEVIT, I., WINGET, J. (1983): "An Element-by-Element Solution Algorithm for Problems of Structural and Solid Mechanics", Comp. Meth. Appl. Mech. & Eng., Vol. 36, pp 241-254.

[7] MARTI, J., CUNDALL, P.A. (1982): "Mixed Discretization Procedure for Accurate Modelling of Plastic Collapse", Int. J. Numer. & Anal. Meth. Geomech., Vol. 6 (1), pp 129-139.

[8] MARTI, J., RODRIGUEZ-OVEJERO, L. (1982): "Resolución Numérica de Problemas de Impacto", en "Aplicaciones del Método de los Elementos Finitos en Ingeniería" (1er Simposium, Barcelona), E. Oñate et al editores, pp 135-150.

[9] MARTI, J., GOICOLEA, J.M., KALSI, G.S., MACEY, G.E. (1984): "Transient Thermomechanical Analysis with explicit Schemes", en "Numerical Methods for Trnsient and Coupled Problems" (Int. Conf. Venice), R.W. Lewis et al. eds., Pineridge Press (Swansea, U.K.), pp 371-381.

[10] NAGTEGAAL, J.C., PARKS, D.M., RICE, J.R. (1984): "On Numerically Accurate Finite Element Solutions in the Fully Plastic Range", Comp. Meth. Appl. Mech. & Eng., Vol 4, pp 153-177.

[11] PRINCIPIA ESPAÑA S.A. (1986): "Documentación PR2D/PR3D: Manual Teórico, Manuales del usuario".

[12] UNDERWOOD, P. (1983): "Dynamic Relaxation", en "Computational Methods for Transient Analysis", T. Belytschko y T.J.R. Hughes eds., North Holland, pp 245-266.

[13] WILKINS, M.L. (1964): "Calculation of Elastic-Plastic Flow", en "Methods of Computational Physics", Vol.3, B. Alder et al. eds., Academic Press (New York), pp 211-263.

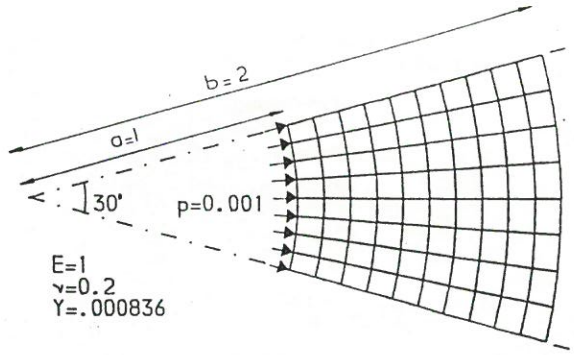

Figura 1: Modelo de cálculo para lámina esférica

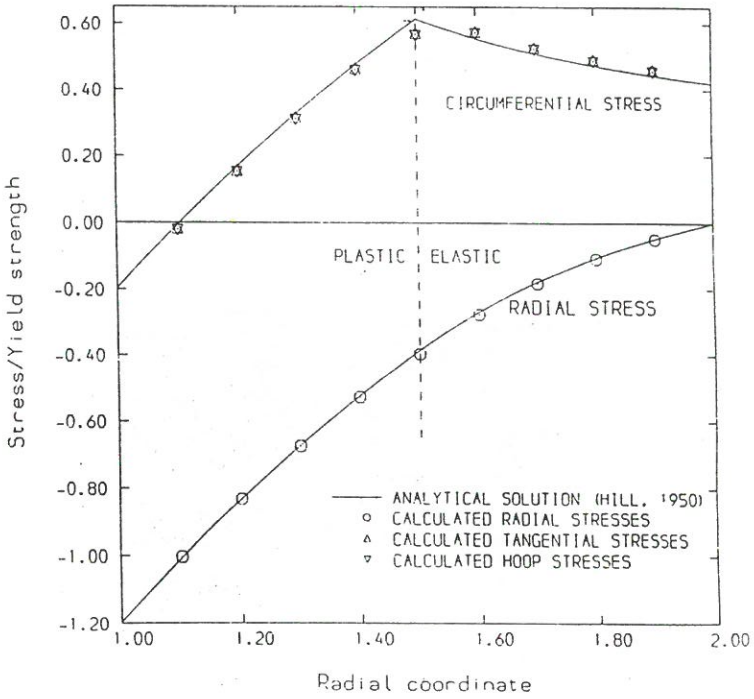

Figura 2: Distribución de tensiones en lámina esférica

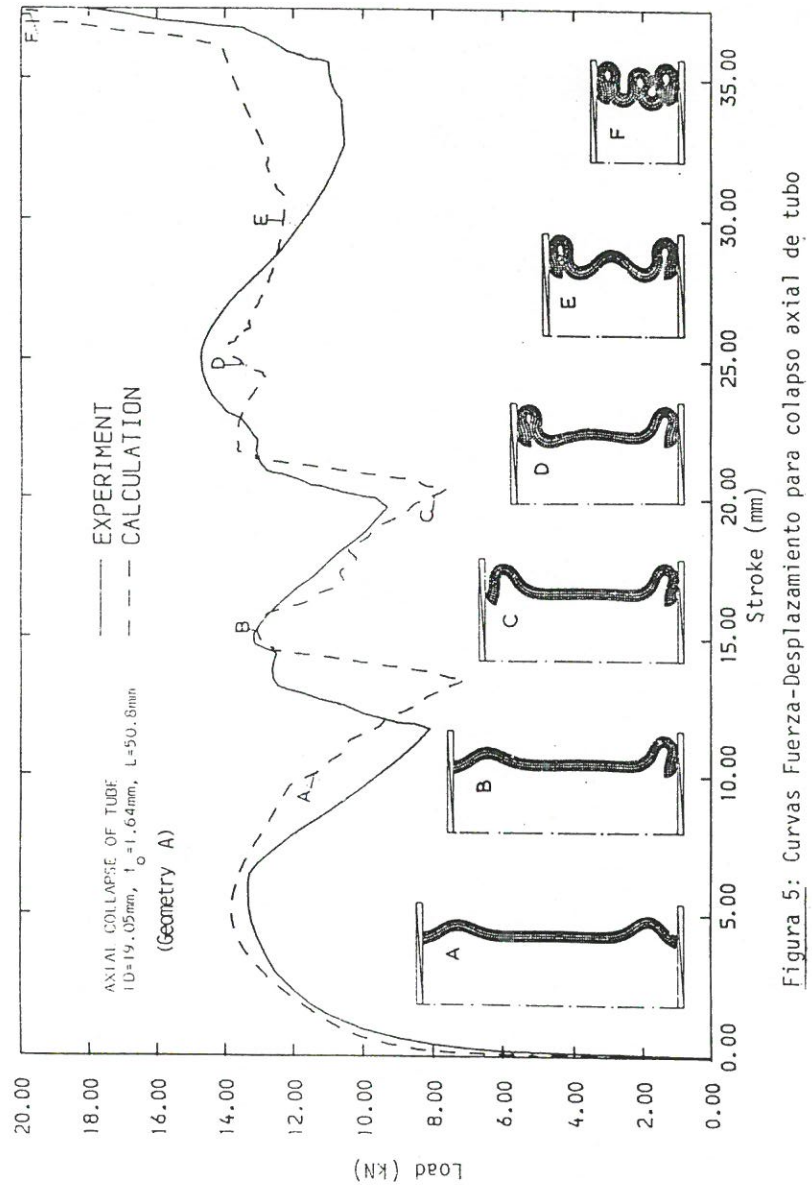

Figura 5: Curvas Fuerza-Desplazamiento para colapso axial de tubo

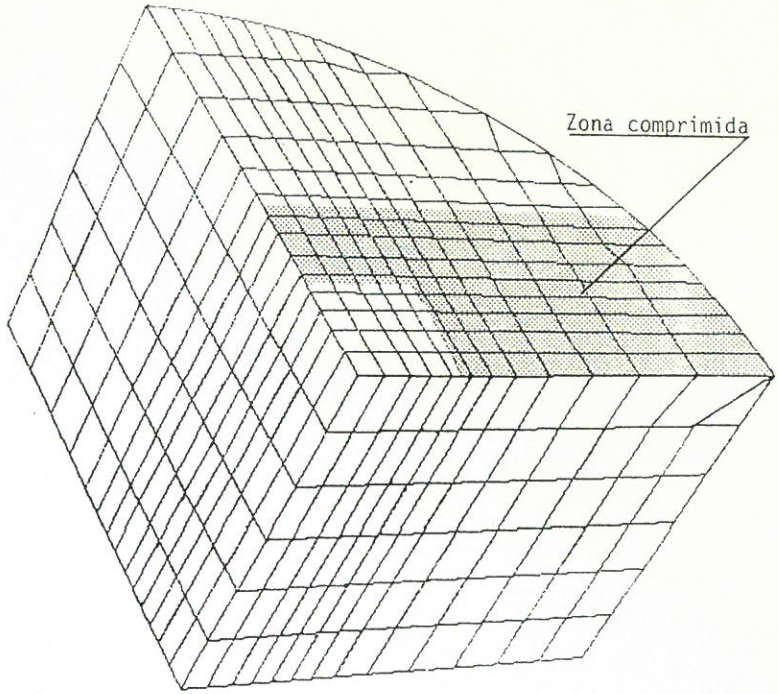

Figura 6: Modelo para extrusión de Aluminio

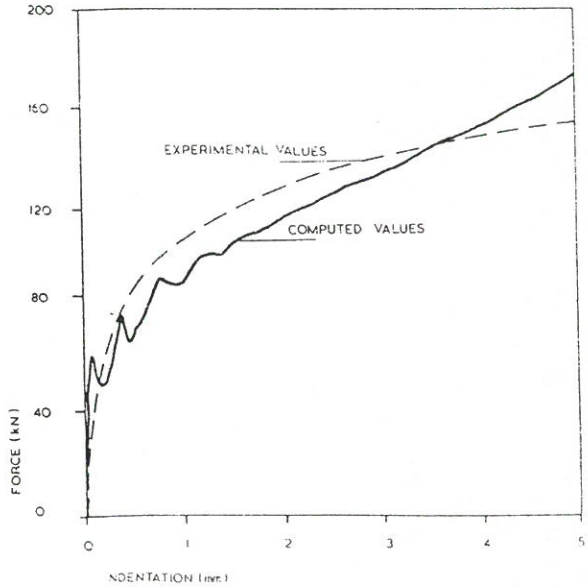

Figura 7: Curvas Fuerza-Desplazamiento para extrusión

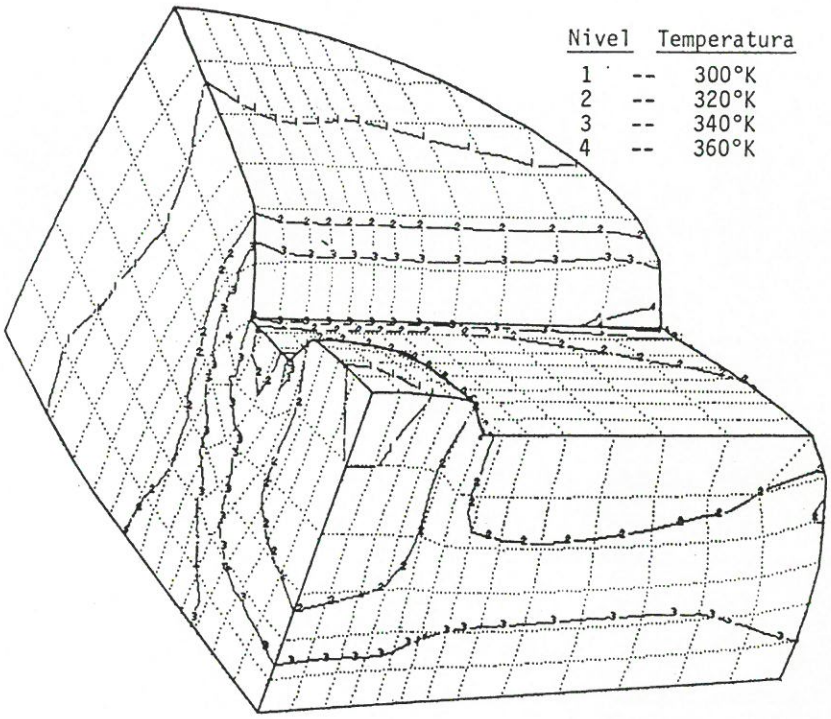

Figura 8: Modelo de extrusión deformado, con líneas de igual temperatura