1st National Symposium Engineering Applications
of the Finite Element Method.

15-17 December 1982
Barcelona (Spain)

# RESOLUCION NUMERICA DE PROBLEMAS DE IMPACTO

Joaquin Martí[1] y Luis Rodríguez-Ovejero[2]

(1) Principia, 50 Vineyard Path, Londres SW14
(2) C.D. Ibérica, Castellana 93, Madrid 16

## 1. INTRODUCCION

Los problemas de impacto presentan ciertas características generales que establecen a priori la superioridad de ciertos métodos numéricos sobre los demás. Dado que este tipo de problemas se resolvían tradicionalmente por métodos muy simplificados, es conveniente enunciar aquí algunas de estas características y su influencia en el método numérico seleccionado.

En primer lugar, el carácter dinámico del problema es tan importante que el tratamiento elegido no puede incluir aproximaciones en las fuerzas de inercia y debe conservar exactamente la cantidad de movimiento del sistema. Los métodos que se basan en equivalentes estáticos de esfuerzos dinámicos son de aplicación muy limitada.

El hecho de que dos cuerpos establezcan contacto en un área que depende del tiempo introduce un marcado carácter no lineal en el problema. Este carácter perdura incluso en problemas elásticos con pequeñas deformaciones, tanto por el establecimiento y rotura del contacto, como por deslizamiento en impactos oblicuos o simplemente asimétricos. La situación se extrema cuando, como es frecuente, las tensiones de contacto son suficientes para plastificar regiones de uno o ambos cuerpos en contacto. Esto hace perder la linealidad constitutiva e introduce aún mayores variaciones temporales en la topología del área de contacto.

La falta de linealidad y el carácter dinámico prácticamente obligan a la utilización de métodos de integración directa en el tiempo de las ecuaciones

del movimiento. Asimismo , es casi imprescindible llevar a cabo la integración de forma explícita. La posible ventaja de una integración implícita (un mayor intervalo de integración) se pierde al reformular continuamente la matriz de rigidez y al tener que iterar (generalmente sin garantía de convergencia) debido a las violaciones de linealidad incremental.

Con la excepción de impactos entre cuerpos axisimétricos con sus ejes alineados con la velocidad de impacto, o entre cuerpos largos en condiciones asimilables a deformación plana, el carácter tridimensional de la mayor parte de los problemas de impacto es difícil de eludir. La naturaleza dinámica y no lineal del problema impide a menudo alcanzar a priori una comprensión del problema suficientemente profunda como para poder imponer reducciones de dimensiones de validez dudosa. Esto alarga y encarece el tratamiento de los problemas de impacto.

La casi única ventaja de estos problemas es su pequeña duración. Esto cancela el principal inconveniente de la integración explícita de las ecuaciones del movimiento, que es la limitación estricta del intervalo de integración impuesta por la condición de estabilidad de Courant. En un problema de corta duración, esta limitación es de importancia secundaria.

En el resto de este artículo se describe la metodología usada en PR3D (Martí, 1982), que es un programa especialmemte desarrollado para analizar problemas de impacto, así como su utilización para resolución de una pareja de problemas típicos.

## 2. PLANTEAMIENTO TEORICO

El planteamiento teórico de la resolución de problemas dinámicos por integración explícita se explica brevemente en esta sección dedicando atención especial a los procedimientos usados en PR3D.

### 2.1 El Continuo

Las ecuaciones principales a resolver en el continuo son las ecuaciones del movimiento y las ecuaciones constitutivas. Las primeras se expresan:



$$\sigma_{ij,j} + \rho(f_i - \ddot{u}_i) = 0 \qquad (1)$$

donde
- $\sigma_{ij}$ es el tensor de tensiones
- $\rho$ es la densidad
- $f_i$ son las fuerzas de masa
- $\ddot{u}_i$ son los desplazamientos

puntos implican derivadas temporales, comas significan derivadas parciales espaciales e índices repetidos indican contracción

Cuando el continuo está discretizado en elementos pequeños y la masa está concentrada en los nodos de la malla, las ecuaciones 1 se pueden integrar alrededor de cada nodo para calcular aceleraciones a partir de las tensiones:

$$\ddot{u}_i = \frac{\int_S \sigma_{ij}\, n_j\, dS + M f_i + F_i}{M} \qquad (2)$$

donde
- S es el área que rodea al nodo en cuestión y que encierra su masa M
- $n_j$ es la normal al elemento de área dS
- $F_i$ son fuerzas exteriores aplicadas al nodo

La integración explícita de las ecuaciones en un método central se expresa:

$$\dot{u}_i\,(t+\Delta t/2) = \dot{u}_i\,(t-\Delta t/2) + \ddot{u}_i\,(t)\,\Delta t \qquad (3)$$

Nótese que las aceleraciones y velocidades calculadas en cada nodo sólo dependen de la integración de las tensiones llevada a cabo alrededor del nodo. El procedimiento es válido lógicamente en tanto en cuanto $\Delta t$ sea suficientemente pequeño para que dos nodos contiguos no tengan tiempo material de comunicarse durante $\Delta t$. Esta limitación lógica es la expresada en el criterio de Courant matemáticamente, que requiere que $\Delta t$ sea menor que el mínimo período propio del sistema.

Las ecuaciones constitutivas pueden ser completamente generales. Sin embargo, criterios prácticos introducen ciertas limitaciones. En principio, un algoritmo debe existir que permita calcular al final de cada intervalo de integración un incremento del tensor de tensiones en función de los incrementos (y posiblemente de las historias)

de las variables de estado y de un conjunto de constantes que son las propiedades del material. La formulación incremental de las ecuaciones constitutivas introducidas en PR3D es siempre del tipo :

$$\overset{\circ}{\sigma}_{ij} = f\,(\dot{\varepsilon}_{kl},\ \varepsilon_{kl},\ \sigma_{kl},\ \{H\},\ \{K\})$$

donde $\overset{\circ}{\sigma}_{ij}$ es la derivada corrotacional de Jaumann
$\varepsilon_{kl}$ es el tensor de deformaciones
$\{H\}$ es un conjunto de variables de estado
$\{K\}$ son las constantes del material

El uso de la derivada corrotacional de Jaumann se impone como consecuencia del carácter lagrangiano de la formulación y de la posibilidad de grandes giros de la malla con respecto a los ejes globales (ver, por ejemplo, Fung, 1965). El conjunto de variables de estado se utiliza para representar efectos de la historia pasada de deformaciones, evitando así el tener que recordarla por completo, lo que no es viable en la resolución de problemas de contorno generales.

Los incrementos de deformaciones y giros se calculan refiriendo incrementos de desplazamientos relativos a las coordenadas actualizadas de la malla en la forma incremental tradicional. El ciclo computacional se describe en la Fig. 1.

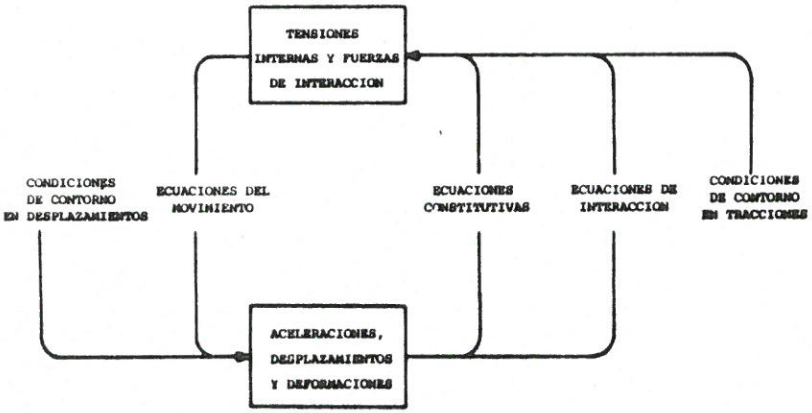



Fig.1 Esquema del ciclo computacional en cálculos explícitos



En PR3D, la malla utilizada se basa en tetraedros de deformación uniforme en el contexto de una discretización mixta (Martí y Cundall, 1982). La parte desviadora de los tensores de tensiones y deformaciones se refiere a tetraedros de deformación uniforme, mientras que su componente hidrostática se refiere a elementos mayores cuya extensión varía entre 1 y 5 tetraedros. Este procedimiento evita a la vez la rigidización artificial durante colapso plástico y el desarrollo de modos que no originan tensiones internas.

## 2.2 La Interfase

La interacción entre continuos durante impactos es un problema al menos tan complejo como el comportamiento interno de los continuos en cuestión. El problema es doble. En primer lugar está el problema topológico consistente en encontrar a cada momento todos los nodos exteriores que están en contacto con superficies exteriores del mismo u otros cuerpos. En segundo lugar, encontradas las áreas de contacto, hay que determinar las fuerzas de interacción desarrolladas.

El problema se simplifica cuando el contraste de características del continuo "proyectil" y del continuo "blanco" es tal que uno de los dos puede reemplazarse para efectos del estudio del otro por una condición de contorno, sea en desplazamientos, fuerzas o de tipo mixto. Un ejemplo de este tipo de problemas muy estudiado en los últimos años es el impacto de aviones contra estructuras en complejos nucleares (por ejemplo, Martí et al, 1982). El proyectil es tan blando que se pueden llevar a cabo estudios razonablemente conservadores del comportamiento del blanco reemplazando el proyectil por una historia de tensiones exteriores aplicadas en la superficie del blanco.

Otro ejemplo es el estudio en balística de las deformaciones sufridas por un proyectil al chocar contra una coraza de rigidez y resistencia elevadas. Como se ve en el ejemplo presentado más adelante en este artículo, el blanco puede entonces representarse por medio de un plano rígido; esto es una condición de contorno que anula las velocidades positivas de penetración de los nodos que establencen contacto con el plano.

Sin embargo, en general, el análisis requiere

la modelización del proyectil y del blanco, así como de la interacción correspondiente. Various tipos de métodos se han usado para representar esta interacción. Los más sencillos son los de tipo cinemático (Johnson, 1977), que se limitan a volver a colocar en la superficie de un continuo cualquier nodo que intente penetrarlo. Esto corresponde a una interacción sin rozamiento entre cuerpos impenetrables.

Muchos problemas requieren interacciones más complejas. A menudo es imprescindible tener en cuenta el rozamiento entre las superficies en contacto. Además, las superficies rugosas presentan cierta compresibilidad de la interfase en la dirección normal al contacto. Con el fin de poder incorporar leyes de interacción más generales, Cundall y Martí (1979) propusieron una formulación que permite el empleo de leyes de interacción completamente generales. Desgraciadamente la formulación requiere la generación y desplazamiento continuo de nodos adicionales en oposición a cada nodo que participa en un contacto. La generalización a tres dimensiones de este concepto sería sumamente compleja.

La filosofía segida en PR3D es del tipo de de la de Cundall y Martí (1979) pero sin utilización de nodos adicionales. Aunque también permite el empleo de leyes generales de interacción, las únicas utilizadas hasta el momento se caracterizan por una penetración normal elástica y un comportamiento tangencial también elástico hasta que se excede la resistencia por rozamiento, en cuyo caso comienza el deslizamiento.

El programa localiza automáticamente en cada momento a todos los nodos que intervienen en contactos y clasifica estos contactos en tres categorías: nodo-nodo, nodo-arista y nodo-cara. En cada contacto, los desplazamientos relativos se calculan al final de cada intervalo de integración. Los desplazamientos se introducen en las leyes de interación para hallar las fuerzas de interacción correspondientes. Estas fuerzas actuarán sobre el nodo o nodos que participan en el contacto durante el próximo intervalo de integración. Si hay más de un nodo (caso de contactos nodo-arista y nodo-cara) las fuerzas se reparten en proporción inversa a las distancias entre los nodos y el punto de contacto.



El proceso es complicado debido a las correcciones introducidas por los giros (similares a la formulación de Jaumann) y a las dos direcciones independientes de movimientes tangenciales. Conceptualmente, las operaciones se describen en la Fig.1. Los detalles de la formulación pueden verse en la documentación del programa (Martí, 1982).

## 3. EJEMPLOS

Dos ejemplos de problemas de impacto han sido seleccionados para este artículo. El primero constituye un caso en el que el blanco puede representarse por medio de condiciones de contorno. El segundo requiere el estudio detallado de las deformaciones tanto del proyectil como del blanco.

### Proyectil contra Coraza Rígida

Se considera un proyectil cilíndrico largo de alumínio que se desplaza a 227m/seg paralelamente a su eje. En estas condiciones el proyectil choca con una coraza rígida plana en la que puede deslizar sin rozamiento y cuya normal forma un angulo de $10^{o}$ con respecto al eje del proyectil.

El proyectil tiene un diámetro de 6,38mm y una longitud de 305mm. El aluminio se ha representado en este caso como un material elastoplástico caracterizado por sus constantes de Lamé $\lambda=4,63\times10^{10}$Pa y $\mu=3,08\times10^{10}$Pa; una tensión de fluencia $\sigma_y=2,90\times10^{8}$Pa, y un coeficiente de endurecimiento plástico $H=5,50\times10^{7}$Pa. La densidad se ha tomado como $2.847 kg/m^3$. La superficie de fluencia es localmente un cilindro del tipo de Von Mises, aunque su radio sufre los cambios de dimensiones indicados por el endurecimiento plástico isótropo propuesto.

La Figura 2 presenta las deformaciones progresivas de la malla alcanzadas durante el primer milisegundo después del impacto. Como puede observarse, las grandes deformaciones plásticas desarrolladas ocurren, gracias a la discretización mixta, libres de modos artificiales de vibración sin restricciones. La malla tiene 2800 tetraedros. Para su generación, así como en el postprocesado necesario para la preparación de las figuras de este artículo se utilizó el programa PRIMPRE? (Martí, 1982).

Una perspectiva isométrica de la mitad del proyectil representada permite apreciar la discretización en más detalle en la Figura 3. Nótese que la perspectiva es cilíndrica y no cónica y que el plano de simetría continúa siéndolo durante las deformaciones. Esta advertencia se da debido al efecto óptico que hace que las zonas aplastadas por el impacto parezcan encontrarse más cerca del observador. Los datos para este ejemplo se tomaron de Hallquist (1979).

**Impacto entre Tuberías**

En este ejemplo, la representación detallada del proyectil, el blanco y su interacción es inevitable. En particular, el programa debe determinar continuamente la superficie variable a través de la cual se produce la interacción entre los dos cuerpos.

Se trata de dos tuberías relativamente gruesas. La primera, estacionaria, está empotrada en un extremo y libre en el otro. El diámetro, espesor y longitud de esta tubería son, respectivamente, 319mm, 16mm y 992mm.

La segunda tiene su eje perpendicular al de la primera y se desplaza con una velocidad inicial de 50m/seg en dirección perpendicular a los ejes de ambas tuberías. Su diámetro, espesor y longitud son 395,6mm, 33,5mm y 1600mm, respectivamente.

En esta situación la segunda tubería choca con la primera a una distancia de 480mm de su empotramiento. Ambas tuberías son de acero con una densidad de 7800kg/$m^3$ y presentan un comportamiento elastoplástico perfecto así como un criterio de rotura relacionado con las deformaciones plásticas acumuladas por el material. Las constants de Lamé se tomaron como $\lambda = 1,165 \times 10^{11}$Pa y $\mu = 7,77 \times 10^{10}$Pa. La tensión de fluencia sin fijó en $\sigma_y = 2.86 \times 10^{8}$Pa con una hipótesis de plasticidad de Von Mises sin endurecimiento. Sin embargo, se añadió la condición de que el material rompería (es decir, sería incapaz de soportar tensiones desviadoras) cuando su deformación plástica efectiva alcanzara la cifra de 0,2.

La simetría del problema permitió restringir a la mitad la modelización de las tuberías. Un total de 7644 tetraedros se usaron en la construcción de las mallas aunque, para agilizar el postprocesado de los resultados y simplificar su visualización, las figuras presentan los nodos conectados por medio de hexaedros y pentaedros. En realidad, cada hexaedro está dividido en seis tetraedros y cada pentaedro en tres.



El intervalo de integración de 1μseg se mantuvo constante durante los 5mseg analizados. La Figura 4 presenta varias perspectivas de las mallas deformadas. En las mismas figuras se han incluido algunos contornos de la tensión octaédrica correspondientes a varios porcentajes de la máxima admisible por el material. La sección presentada en la Figura 5 de una idea del tamaño de las deformaciones desarrolladas 5mseg después del impacto.

La interpretación de los resultados requiere también la información contenida en las Figuras 6 y 7. Figura 6 muestra la evolución de la velocidad del primer punto que sufre el impacto en la tubería estacionaria. Como se ve, su velocidad va siendo frenada a medida que se disipa energía por un proceso de deformaciones irreversibles. La Figura 7 nuestra la evolución de la velocidad de un punto en el extremo libre de la tubería estacionaria.

Aunque la discusión aquí debe ser necesariamente breve, vale la pena comentar que los dos primeros milisegundos se caracterizan por una aumento gradual de las deformaciones plásticas locales ocasionadas en la tubería estacionaria, más delgada y deformable que la otra. Esto resulta en un aumento del área de contacto. A partir de este punto la integral de las tensiones de fluencia sobre el área de contacto es suficientemente grande como para crear una rótula plástica en el empotramiento. En consecuencia, las deformaciones locales se estabilizan mientras las deformaciones en el empotramiento empiezan a crecer. El efecto látigo resultante hace que el extremo libre de la tubería empotrada llegue a adquirir velocidades superiores a la inicial del impacto.

## 4. CONCLUSIONES

La integración explícita en el tiempo de las ecuaciones del movimiento es un método sumamente adecuado para la resolución numérica de problemas de impacto. Es ideal para tratar su naturaleza

dinámica y tridimensional, así como su no linealidad geométrica y constitutiva. La corta duración de los problemas de impacto hace mínima la desventaja principal de esta integración, que es la necesidad de un intervalo de integración relativamente pequeño.

**Referencias**


Cundall, P.A. y Martí, J. (1979) "Some New Developments in Discrete Numerical Methods for Dynamic Modelling of Jointed Rock Masses", Rapid Excavation and Tunnelling Conference, Atlanta, Vol.II, pp.1466-1484.

Fung, Y.C. (1965) "Foundations of Solid Mechanics", Prentice-Hall Inc., New Jersey.

Hallquist, J.O. (1979) "Preliminary User's Manuals for DYNA3D and DYNAP (Nonlinear Dynamic Analysis of Solids in Three Dimensions)", Lawrence Livermore Laboratory, Octubre.

Johnson, G. (1977) "Liquid-Solid Impact Calculations with Triangular Elements", Journal of Fluids Engineering, Trans. of the ASME, Septiembre, pp.598-600.

Martí, J. (1982) "PR3D - Documentation. Version 2P-5", Principia Mechanica Limited, Informes No.7.1 a 7.4.

Martí, J. y Cundall, P.A. (1982) "Mixed Discretisation Procedure for Accurate Modelling of Plastic Collapse", Int. Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics, Vol.6, No.1, pp.129-139.

Martí, J., Kalsi, G., Trbojevic, V.M. y Attalla, I. (1982) "Three-Dimensional Dynamic Non-Linear Modelling of Reinforced Concrete under Impact Loads", Simposium sobre 'Concrete Structures under Impact and Impulsive Loading', Berlin, pp.548-562.

White, D.C. (1982) "PRINPREP - Documentation", Principia Mechanica Limited, Informe No.98/82.



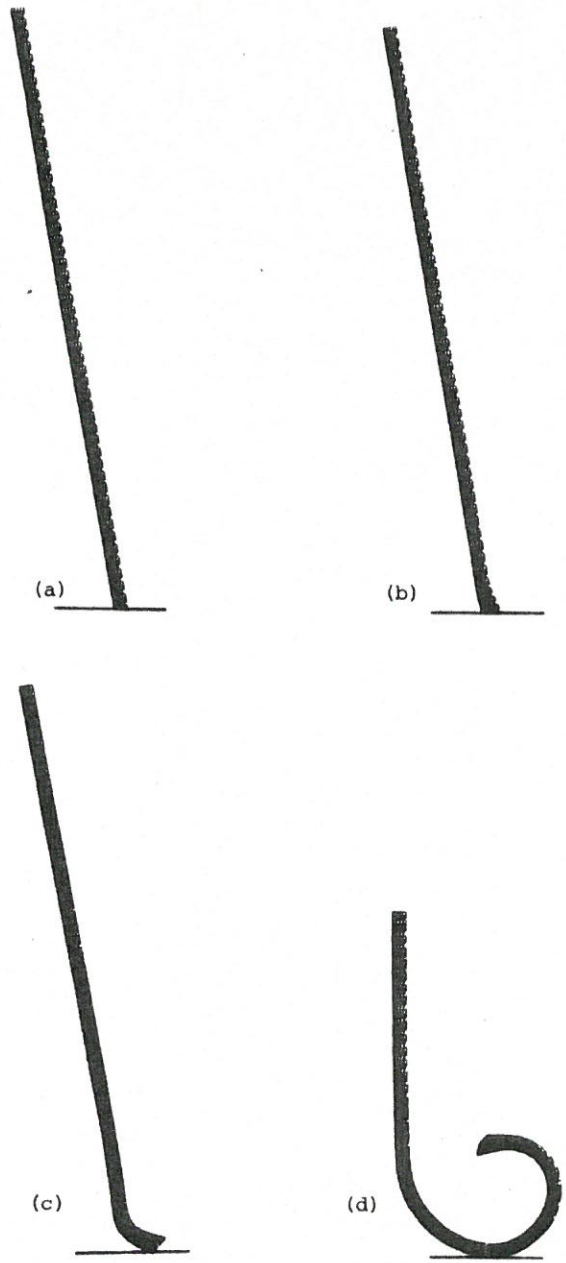




Fig.2 Deformaciones progresivas del proyectil en su plano de simetría después de (a) 0μseg, (b) 47μseg, (c) 118μseg y (d) 950μseg

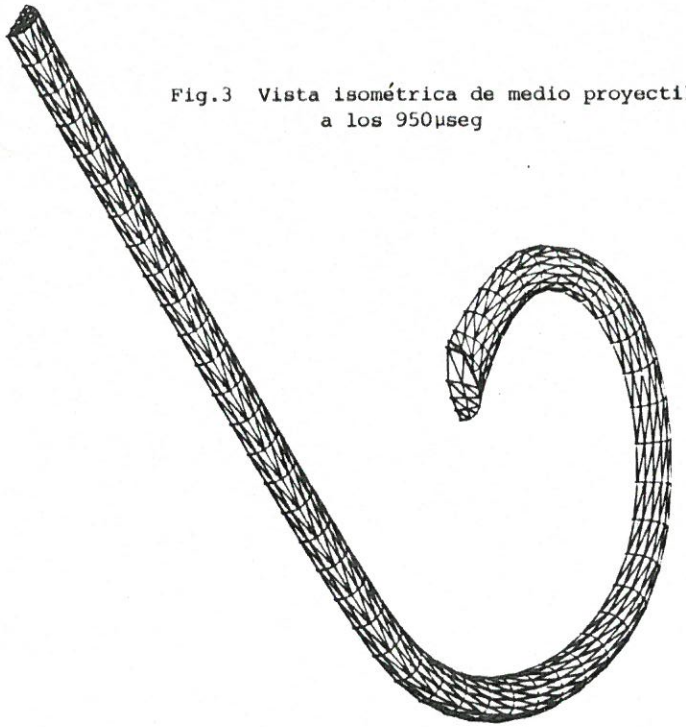


Fig.3 Vista isométrica de medio proyectil a los 950µseg

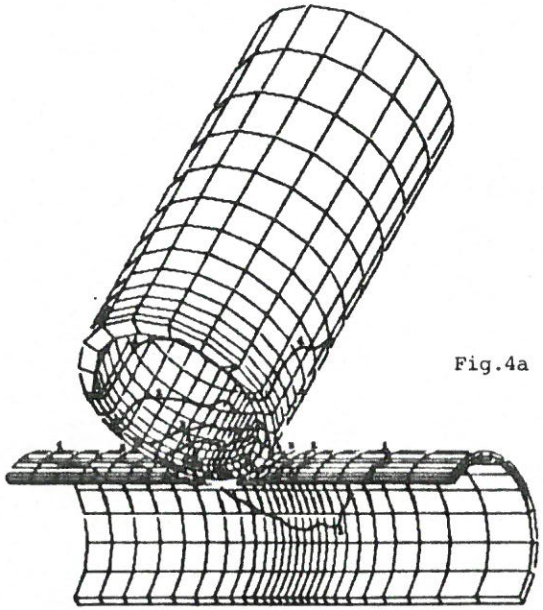
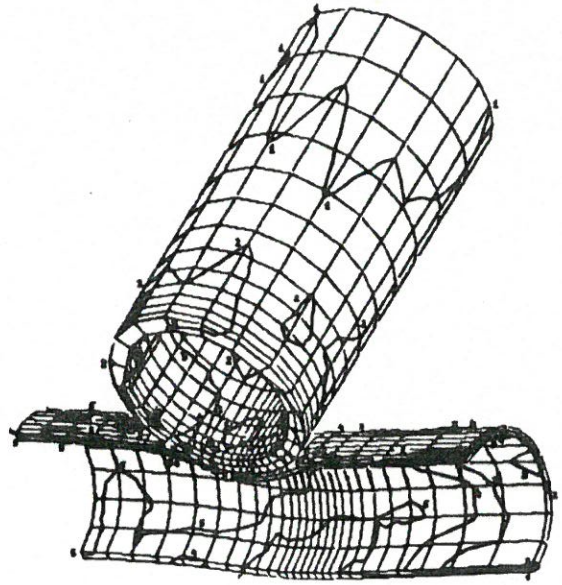
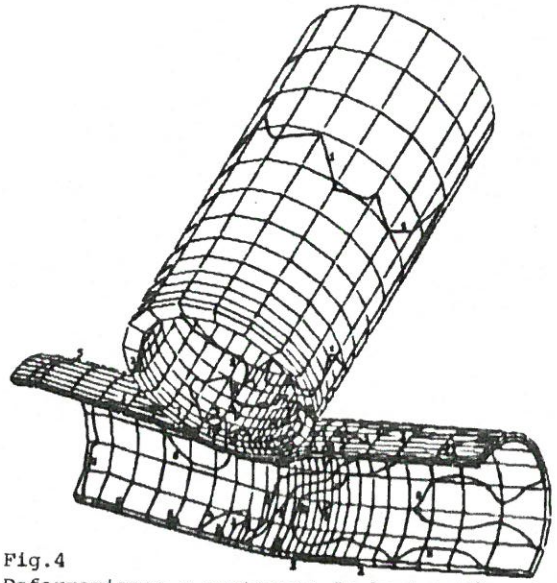


Fig.4a





(b)



(c)

Fig.4
Deformaciones y contornos de la tensión octaédrica
(a) 0.1mseg (b) 2mseg y (c) 5mseg después del impacto

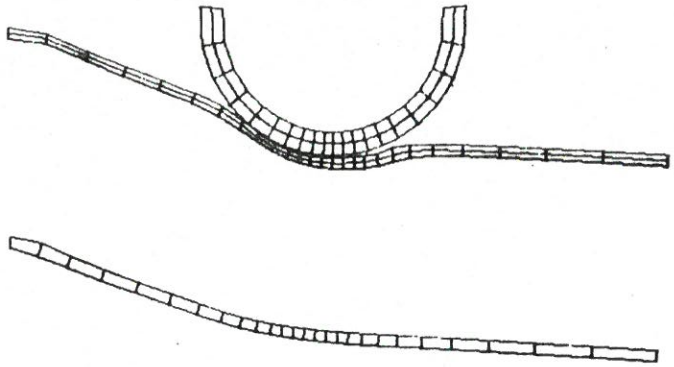


Fig.5 Sección de las tuberías por el plano de simetría a los 5mseg

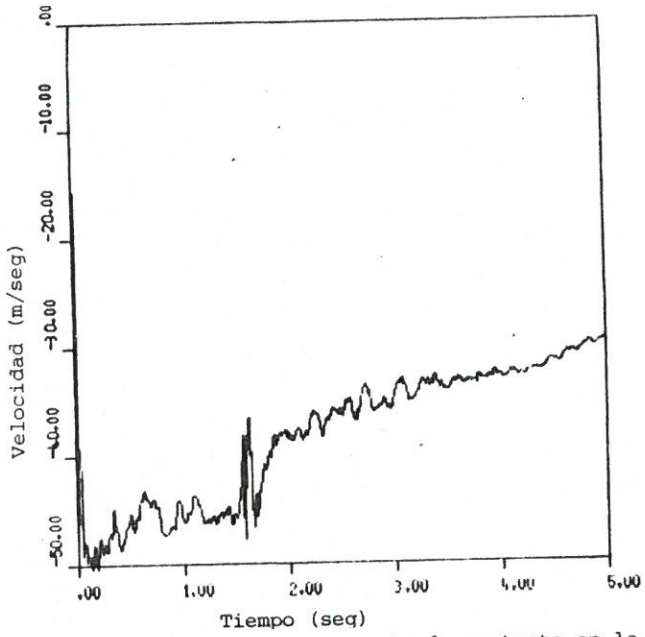



Fig.6 Velocidad del primer punto de contacto en la tubería empotrada



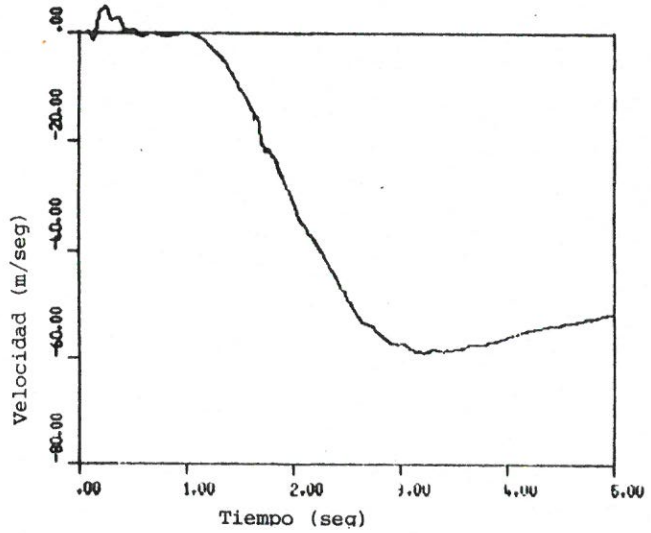



Fig.7 Velocidad del extremo libre de la tubería empotrada